Math. p.
2571 d

Kausler

Soldner

1 fl. 30 kr.

Die Lehre

von den

Continuirlichen Brüchen,

nebst ihren

vorzüglichsten Anwendungen

auf Arithmetik und Algebra

vollständig abgehandelt

von

C. J. Kausler,

Churfürstlich Wirtembergischer Hofrath und Edelknaben
Gouverneur, der Rußisch-Kaiserlichen Akademie der Wissen-
schaften zu St. Petersburg wirkliches, und der
Königlich Grosbritanischen Societät
der Wissenschaften zu Göttingen
Ehrenmitglied.

Stuttgart,

bei Franz Christian Löflund.

1803.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Bayerische Staatsbibliothek München

Vorerinnerung.

Die Lehre von den continuirlichen Brüchen ist durch die Verbindung, worinn sie mit den wichtigsten Aufgaben der Arithmetik und Algebra steht, unter deren mehrere ohne sie unauflösbar wären, eine der vorzüglichsten in diesem Theile der Mathematik. Bis in die Differenzial- und Integralrechnung hinein erstrekt sich ihr mannigfaltiger Nuzen, und der gröste Theil der durch die Neueren so sehr erweiterten unbestimmten Analytic, in welche die ganze Theorie der Zahlen gehört, ist auf sie als eine Grundlage gebaut. Gleichwohl ist diese an Erfindung so sinnreiche, an Anwendungen so fruchtbare Lehre noch nirgends nach ihrem ganzen Umfange so vorgetragen worden, daß alle ihre Lehrsätze als ein Ganzes zusammen hängen, und daß

derjenige, der ihre Theorie vollständig vortragen, wer zu ferneren Untersuchungen benuzen wollte, alles in systematischer Ordnung, und gleichsam in ein grosses Ganzes zusammen geschmolzen, anträfe. Dieser Mangel wird besonders fühlbar, wenn man Jünglingen, die durch Geistesgaben, und aus Rücksichten künftiger Bestimmung weiter in die Mathesis eindringen, als der gewöhnliche Haufe von Studierenden, auch hierinn befriedigende Aufklärung geben soll. Ein solcher Fall war eben die nähere Veranlassung zu gegenwärtigem Werkchen, in welchem ich mich bemühte, die wichtigsten Sätze über continuirliche Brüche mit mathematischer Schärfe und Ordnung vorzutragen, und sie durch Anwendungen zu erläutern.

Die Quellen, aus denen ich schöpfte, waren:

Eulers Introductio in Analysin infinitorum.

La Grange, Zusätze zu Eulers Algebra.

Le Gendre Theorie der Zahlen.

Lamberts Beiträge zum Gebrauch der Mathematik.

Mehrere Abhandlungen von Euler und La Grange. in den Petersburger Commentaren, und den Berliner Denkschriften.

Daß ich aber nicht blos Sätze an einander gereihet habe, davon hoffe ich werden Kenner sich an manchen Stellen von selbst überzeugen; daher ich es auch für überflüßig halte, mich hierüber weiter zu äussern.

Auch glaube ich, man werde es mir Dank wissen, daß ich in dem lezten Kapitel die vortrefliche Methode des Herrn La Grange Gleichungen durch Näherung vermittelst der continuirlichen Brüche aufzulösen, etwas ausführlich aus einander gesezt habe: um so mehr, als dieselbe, wenigstens meines Wissens, noch in keinem deutschem Werke zu finden ist, ob schon sie schon längst verdienet hätte, nebst der wichtigen Lehre von den continuirlichen Brüchen in die Lehrbücher der Algebra aufgenommen zu werden. Der Umstand, daß bei derselben Differenzialrechnung vorkommt, ist nicht wesentlich: denn die von mir in dem lezten Abschnitte gegebenen Formeln gründen sich einzig und allein auf den binomischen Lehrsaz, und die Differenzialrechnung kann, wenn man will, ganz hinweg gelassen werden.

Und nun nur noch ein Paar Worte, die Geschichte der continuirlichen Brüche betreffend.

Die erste Spur von solchen Brüchen findet man in Wallis Algebra, worinn dieser Schriftsteller eines Ausdrucks erwähnt, durch welchen Lord Brounker das Verhältniß eines um einen Zirkel beschriebenen Quadrats zur Fläche des Zirkels bestimmt; und woselbst er auch eine Methode angibt, jeden continuirlichen Bruch in einen gewöhnlichen zu verwandeln.

Nach ihm hat vorzüglich Huygens in einem nach seinem Tode herausgekommenen Werke: Descriptio automati planetarii dadurch diese Lehre erweitert, daß er gezeigt, wie gewöhnliche Brüche, durch Division, in continuirliche verwandelt werden können. Auch kannte er schon einige ihrer vorzüglichsten Eigenschaften, und besonders zeigte er, wie man sie anwenden könne, um die Umlaufszeiten der Planeten so genau als möglich durch Räderwerk vorzustellen.

Sodann hat Euler in den älteren und neueren Petersburger Commentaren, und besonders in seiner Introductio &c. eben diese Brüche näher und allgemein untersucht, mehrere Eigenschaften und Anwendungen davon entdeckt, besonders in Rücksicht auf Reihen.

Auch

Auch war er es, der zuerst die unten im dritten Abschnitte vorgetragene, sinnreiche Anwendung auf Ausziehung der Quadratwurzeln entdeckte, und schon das Gesez wußte, daß die Wurzel aus unvollkommenen Quadraten, in continuirlichen Brüchen ausgedrückt, immer periodisch ist.

In den neuesten Zeiten haben besonders La Grange und Le Gendre in den oben angeführten Werken die Lehre von den continuirlichen Brüchen durch neue Eigenschaften, oder hellere Beweise der schon bekannten ungemein bereichert. Diesen beiden Schriftstellern, besonders lezterem, bin ich bei den meisten Sätzen gefolgt, da mir seine Darstellung bei weitem die lichtvollste und einfachste schien. Besonders verdankt man ihm die so wichtige Einführung der Benennung und des Gebrauchs des vollständigen Quotienten.

Aus Lambert endlich habe ich einige Beispiele, und den Gedanken genommen, Reihen in continuirliche Brüche zu verwandeln. Aber die Ausführung der unten gegebenen so bequemen und fruchtbaren Formeln zur Verwandlung jeder Reihen in continuirliche Brüche, findet sich noch in keinem Werke.

Sollte

Sollte diß wenige des Beifalls der Kenner nicht unwürdig seyn, so dürfte ich mich vielleicht seiner Zeit entschließen, in einer Fortsetzung die so wichtige fernere Anwendung der continuirlichen Brüche auf Differenzial- und Integralrechnung, wie auch auf unbestimmte Analytik ausführlich vorzutragen.

Stuttgart, den 29. Jan. 1803.

Von den continuirlichen Brüchen.

Uebersicht des Ganzen.

Wir leiten im ersten Abschnitte die Eigenschaften der continuirlichen Brüche aus der ihnen eigenthümlichen Form her; zeigen im zweiten den Ursprung und die Erforschung derselben, und wenden sodann im dritten die gefundenen Lehren auf merkwürdige Aufgaben der Arithmetik und Algebra an.

I. Abschnitt.

Von den Eigenschaften der continuirlichen Brüche.

1. Definition.

§. 1. Ein continuirlicher (stetiger) Bruch, (fractio continua, fraction continue,) ist ein solcher, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, welches lezteren Nenner abermals eine Summe

einer ganzen Zahl und eines Bruchs ist, und so fort, entweder ins Unendliche, oder bis zu gewissen, in der Natur der Sache liegenden, Gränzen.

Beispiele hievon sind die Brüche:

$$\cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d}}\;;\quad \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f}}}\;;\quad \cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \cfrac{g}{h + \&c.}}}}$$

in welchen, sowohl unter den Zählern, als auch unter den Nennern, verneinte Größen vorkommen können.

Anmerkung.

§. 2. Da in der Folge gezeigt werden soll, daß sich Brüche, in welchen verneinte Größen oder Glieder vorkommen, sehr leicht auf solche mit bejahten zurückführen lassen: so nehmen wir bis dahin an, daß die Zeichen, durch welche die Glieder der verschiedenen Nenner zusammen hängen, insgesammt bejaht seyen.

Ferner betrachten wir vordersamst nur die einfachste, in der Anwendung nüzlichste, Gattung continuirlicher Brüche, in welchen die Zähler alle der Einheit gleich sind, und verstehen also, so lange nicht etwas anders gesagt wird, in Zukunft unter einem continuirlichen Bruch einen solchen von der Form

$$\cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \&c.}}}}$$

oder,

oder, wenn es ein unächter Bruch ist, von dieser:

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon + \&c.}}}}$$

wo die Größen α, β, γ, u. s. w. ein für allemal gesagt, lauter ganze Zahlen vorstellen.

2. Definition.

§. 3. Ein periodischer continuirlicher Bruch ist ein solcher, in welchem die Nenner in eben derselben Ordnung wiederkehren.

Beispiele hievon sind die Brüche:

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\beta + \&c.}}}} \quad , \quad \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\beta + \&c.}}}}}$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\beta + \&c.}}}}}}}$$

Aufgabe.

§. 4. Einen gegebenen continuirlichen Bruch auf einen gewöhnlichen zurückzuführen.

Auflösung.

Man fange bei dem untersten Bruche, der von der Form $\frac{1}{\lambda + \frac{1}{\mu}}$ seyn mag, an, und verwandle denselben in $\frac{\mu}{\lambda\mu + 1} = \frac{p}{q}$. Man hänge sodann diesen Bruch an die ganze Zahl des Nenners des unmittelbar vorhergehenden, welcher leztere also von der Form $\frac{1}{k + \frac{p}{q}}$ seyn wird, und verwandle ihn in: $\frac{q}{kq + p} = \frac{p'}{q'}$. Man hänge nun abermal diesen Bruch an die ganze Zahl des nächst vorhergehenden Nenners, und fahre so fort, bis man endlich zur Zahl α hinauf gestiegen ist; so wird der zulezt erhaltene gewöhnliche Bruch dem gegebenen continuirlichen gleich seyn.

Es sey z. B. der Bruch

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{\varepsilon}}}}$$

gegeben:

So erhält man vordersamst

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{\varepsilon}{\delta\varepsilon + 1}}} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{p}{q}}}$$

wo $\frac{\varepsilon}{\delta\varepsilon + 1} = \frac{p}{q}$ ist. Da aber $\cfrac{1}{\gamma + \cfrac{p}{q}} = \frac{q}{q\gamma + p}$, so ist

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{q}{q\gamma + p}} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{r}{s}}, \text{ wo } \frac{q}{q\gamma + p} = \frac{r}{s}$$

Aber $\cfrac{1}{\beta + \cfrac{r}{s}} = \frac{s}{\beta s + r}$, mithin

$$\frac{A}{B} = \alpha + \frac{s}{\beta s + r} = \alpha + \frac{t}{u}, \text{ wo } \frac{s}{\beta s + r} = \frac{t}{u}$$

ist. Daher denn endlich $\frac{A}{B} = \frac{\alpha u + t}{u}$ gefunden wird.

Auf diese Art läßt sich jeder continuirliche Bruch in einen gewöhnlichen verwandeln.

Anmerkung.

Man könnte hier einwenden, die so eben gegebene Auflösung gelte nur von solchen continuirlichen Brüchen, die aus einer bestimmten endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, und sei also auf diejenigen unanwendbar, die ins unendliche fortgehen. Allein ein ins unendliche fortgesezter Bruch heißt doch wohl nichts anders, als ein solcher, statt dessen man, näherungs-

weise,

weise, eine gewisse endliche Anzahl von Gliedern setzen kann. Ausser diesem war der Zwek der vorhergehenden Aufgabe nur, auf das folgende vorzubereiten, und dieser wird erreicht, man mag die Anzahl der Glieder des continuirlichen Bruchs endlich oder unendlich, bestimmt, oder unbestimmt annehmen.

§. 5. Folgerungen und Definitionen, die sich auf die so eben vorgetragene Verwandlung eines continuirlichen Bruchs in einen gewöhnlichen, beziehen.

1) Man kann jeden Nenner eines continuirlichen Bruchs, nehmlich jedes darinn vorkommende Glied von der Form $\lambda + \frac{\nu}{\mu}$ als aus zwei Theilen bestehend betrachten, wovon der eine eine ganze Zahl, der andere aber ein eigentlicher gewöhnlicher Bruch ist, der dadurch entstanden, daß, nach oben vorgetragener Methode, alle auf ihn folgende Brüche von der Form

$$\cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\varrho + \&c.}}}$$

von unten herauf in einen einzigen gewöhnlichen Bruch zusammen gezogen worden sind.

2) Die höchste ganze Zahl, die in einem Nenner stekt, heißt der diesem Bruche zugehörige Quotient. Der Quotient vermehrt um denjenigen gewöhnlichen Bruch, der alle bis zu diesem Nenner (Nr. 1.) zusammen gezogene continuirliche Brüche enthält, heißt der diesem Quotienten zugehörige vollständige Quotient.

tient. So ist in dem Beispiele §. 4. γ ein Quotient, und $\gamma + \frac{\varepsilon}{\delta\varepsilon + 1}$ der der Zahl γ zugehörige vollständige Quotient. Eben so ist β ein Quotient, und $\beta + \frac{q}{q\gamma + p}$ der zu β gehörige vollständige Quotient, u. s. w.

So viele einzelne Glieder von der Form $\frac{1}{\lambda + \frac{1}{\mu}}$ also an einander hängen, um den Werth von $\frac{A}{B}$ zu bilden, eben so viele vollständige Quotienten kann man sich in dieser Reihe denken, weil, wenn man die Brüche von unten herauf in einen einzigen gewöhnlichen Bruch zusammen ziehet, man bei jedem Quotienten stehen bleiben kann, und demnach jeder vollständige Quotient alle folgende Glieder des continuirlichen Bruchs implicite in sich begreift.

3) Jeder vollständige Quotient ist seiner Natur nach größer, als die Einheit; denn er ist die Summe einer ganzen Zahl oder des Quotienten, und eines Bruchs. Erstere aber ist wenigstens 1.

4) Wenn der continuirliche Bruch $\frac{A}{B}$ endlich ist, und z. B. mit dem Gliede $\frac{1}{\lambda}$ aufhört, so ist die ganze Zahl λ zugleich Quotient und vollständiger Quotient; geht der Bruch aber ins Unendliche fort, so muß zu λ noch ein

Bruch $\frac{p}{q}$ addirt werden, wenn

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \,.\, \cdots \,.\, + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{p}{q}}}}$$

dem vollständigen Werthe $\frac{A}{B}$ gleich seyn soll, und $\frac{p}{q}$ muß der bei λ abgebrochenen, ins Unendliche fortgehenden Reihe

$$\cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{\nu + \cfrac{1}{\varrho + \&c.}}}$$

gleich seyn.

5) Wenn $\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \,.\, \cdots \,.\, + \cfrac{1}{\varkappa + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\varphi}}}}}$

ist, wo φ entweder der lezte Quotient, oder ein vollständiger Quotient ist, und man diesen Bruch hinweg wirft, so kann der Ueberrest $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \,.\, \cdots \,.\, + \cfrac{1}{\varkappa + \cfrac{1}{\lambda}}}}$

dem Werth $\frac{A}{B}$ unmöglich mehr vollkommen gleich seyn.

Wirft

Wirft man nicht nur $\frac{1}{\phi}$, sondern auch überdiß $\frac{1}{\lambda}$ hinweg, so ist der Unterschied von $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \cdots + \cfrac{1}{\varkappa}}}$ und von $\frac{A}{B}$ noch größer; und überhaupt, je mehr Brüche in der Reihe für $\frac{A}{B}$ von unten herauf hinweg geworfen werden, desto mehr entfernt sich der dadurch abgekürzte continuirliche Bruch von dem ursprünglichen Werthe von $\frac{A}{B}$. Also umgekehrt, je mehr von oben herab Glieder von der Form $\cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}$ u. s. w. von solchen, die zusammen genommen dem Werthe $\frac{A}{B}$ gleich sind, beibehalten werden, desto näher kommt man dadurch dem wahren Werthe von $\frac{A}{B}$. Es sind daher in

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \cdots + \cfrac{1}{\varkappa + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\varphi}}}}}$$

die Brüche:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{A^0}{B^0},$$

$$\alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{A^1}{B^1},$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}} = \frac{A^{II}}{B^{II}},$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta}}} = \frac{A^{III}}{B^{III}},$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta \; \&c.}}} = \frac{A^{IIII}}{B^{IIII}},$$

lauter Näherungswerthe von $\frac{A}{B}$. Wir nennen sie: Gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche. Diese blos aus den Formen α, $\alpha + \frac{1}{\beta}$; $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \; \&c.}}$ vorläufig abstrahirte Benennung wird sogleich näher beleuchtet und gerechtfertiget werden.

6) Es ist klar, daß man jeden folgenden convergirenden Bruch aus dem unmittelbar vorhergehenden erhält, wenn man in dem leztern, anstatt des ihm zugehörigen Quotienten, eben diesen Quotienten $+ \frac{1}{\text{mit dem folgenden Quot.}}$ annimmt. So entsteht z. B. $\frac{A^{III}}{B^{III}}$ aus $\frac{A^{II}}{B^{II}}$, wenn man in $\frac{A^{II}}{B^{II}}$ anstatt γ den Werth $\gamma + \frac{1}{\delta}$ sezt. Ferner entsteht $\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$ aus $\frac{A^{III}}{B^{III}}$, wenn man in dem lezteren

Bruche

Bruche für δ den Werth $\delta + \frac{1}{\varepsilon}$ annimmt, u. s. w.

Man kann also überhaupt sagen, es entstehe jeder convergirende Bruch aus seinem vorhergehenden völlig eben so, wie dieser aus seinem vorhergehenden entstanden ist.

7) Wenn in $\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}$ für $\beta + \frac{1}{\gamma + \&c.}$ der vollständige Quotient $\mathfrak{B}$ gesezt wird, so ist also

$$\frac{A}{B} = \alpha + \frac{1}{\mathfrak{B}}.$$

Da nun nach Nr. 3. jeder vollständige Quotient größer, als die Einheit ist, so muß $\frac{1}{\mathfrak{B}}$ ein ächter Bruch seyn. Demnach ist α die größte in dem Werthe von $\frac{A}{B}$ steckende ganze Zahl. Eben so, wenn $\mathfrak{C}$ der zu γ gehörige vollständige Quotient ist, muß auch

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\mathfrak{C}}}$$

seyn. Es ist also auch hier $\frac{1}{\mathfrak{C}}$ ein ächter Bruch, und β die größte ganze in $\beta + \frac{1}{\mathfrak{C}}$ steckende Zahl und so weiter mit den übrigen Quotienten. Es sind demnach Quotienten, und größte ganze, in jedem vollständigen Quotienten steckende Zahlen, gleichbedeutende Ausdrücke.

Lehrsaz.

Lehrsatz.

Wenn man aus

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta \ldots \atop \quad \ldots + \cfrac{1}{\varphi}}}}$$

durch stufenweise Hinwegwerfung der Brüche unter $\frac{\alpha}{1}$, der Brüche unter $\frac{1}{\beta}$, der Brüche unter $\frac{1}{\gamma}$ u. s. w. die gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche

$$\frac{A^{0}}{B^{0}} = \frac{\alpha}{1}$$

$$\frac{A^{I}}{B^{I}} = \alpha + \frac{1}{\beta}$$

$$\frac{A^{II}}{B^{II}} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}} \text{ u. s. w.}$$

bildet, so sind dieselben, wenn $\frac{A}{B}$ ein unächter Bruch, und also $\alpha > 0$ ist, abwechselnd kleiner und größer, als $\frac{A}{B}$.

Beweis.

Daß $\frac{A^{0}}{B^{0}}$ oder $\alpha < \alpha + \frac{1}{\beta}$ sey, ist von selbst klar. Nun sey P der vollständige Coefficient von β, so ist

also

also $\frac{A}{B} = \alpha + \frac{1}{P}$. Aber $\frac{A^{I}}{B^{I}} = \alpha + \frac{1}{\beta}$, und $P > \beta$ (§. 6. Nr. 2.) folglich $\frac{1}{P} < \frac{1}{\beta}$, also auch

$$\alpha + \frac{1}{P} < \alpha + \frac{1}{\beta}, \text{ d. i. } \frac{A}{B} < \frac{A^{I}}{B^{I}}.$$

Ferner sey Q der vollständige Quotient von γ; so ist $\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{Q}}$. Nun ist $\frac{A^{II}}{B^{II}} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}$ und $Q > \gamma$, also $\frac{1}{Q} < \frac{1}{\gamma}$, mithin auch

$$\beta + \frac{1}{Q} < \beta + \frac{1}{\gamma}, \text{ daher abermal}$$

$$\cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{Q}} > \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}, \text{ mithin auch}$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{Q}} > \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}, \text{ das ist } \frac{A}{B} > \frac{A^{II}}{B^{II}}$$

Eben so sey R der vollständige Quotient von δ, so haben wir $\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{R}}}$ und $\frac{A^{III}}{B^{III}} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta}}}$

Nun ist $R > \delta$, mithin

$$\frac{1}{R} < \frac{1}{\delta}; \text{ folglich}$$

$$\gamma + \frac{1}{R} < \gamma + \frac{1}{\delta}; \text{ mithin wiederum}$$

$$\frac{1}{\gamma+\frac{1}{R}} > \frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}$$; daher denn auch

$$\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{R}} > \beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}$$; daher abermal

$$\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{R}}} < \frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}}$$, und also auch

$$\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{R}}} < \alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}}$$, das ist:

$$\frac{A}{B} < \frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$$

und da diese Art zu schließen auf jede Anzahl von Quotienten ausgedehnt werden kann, so ist demnach der Satz allgemein erwiesen.

I. Zusatz. Wenn $\frac{A}{B}$ ein ächter Bruch, und somit also $\alpha = 0$ ist, so kann auf völlig ähnliche Art gezeigt werden, daß

$$\frac{A}{B} < \frac{1}{\beta}$$
$$> \frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}$$
$$< \frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}} \text{ \&c.}$$

ist,

II. Zusatz. Da von je zweien unmittelbar auf einander folgenden, und gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüchen, der eine größer, und der andere kleiner als $\frac{A}{B}$ ist: so fällt also der wahre Werth von $\frac{A}{B}$ zwischen jede zwei zunächst auf einander folgenden Brüche der aus $\frac{A}{B}$ abgeleiteten Reihe

$$\frac{A^{o}}{B^{o}},\ \frac{A^{I}}{B^{I}},\ \frac{A^{II}}{B^{II}},\ \frac{A^{III}}{B^{III}},\ \frac{A^{IIII}}{B^{IIII}} \text{ u. s. w.}$$

welche daher des Werths $\frac{A}{B}$ Gränzen sind.

Lehrsaz.

§. 7. Wenn $\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \,.\, \ddots \,.\, + \cfrac{1}{\pi}}}$ einen den Werth $\frac{A}{B}$ ausdrückenden continuirlichen Bruch bedeutet: so läßt sich kein anderer von diesem verschiedener continuirlicher Bruch

$$\alpha' + \cfrac{1}{\beta' + \cfrac{1}{\gamma' \,.\, \ddots \,.\, + \cfrac{1}{\pi'}}}$$

denken, der aus einer kleinern oder größern Anzahl von Gliedern, als der erste bestände, und dabei diesem vollkommen gleich wäre; wenn nehmlich $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, &c. lauter ganze, bejahte Zahlen bedeuten.

Beweis.

Gesezt, das Gegentheil von dem, was hier behauptet wird, fände statt, und man hätte wirklich

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma\,\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot+\cfrac{1}{\pi}}}=\alpha'+\cfrac{1}{\beta'+\cfrac{1}{\gamma'\,\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot+\cfrac{1}{\pi'}}}$$

so sey der dem Quotienten β zugehörige vollständige Quotient $= \mathfrak{B}$, und eben so, der dem Quotienten β' zugehörige vollständige Quotient $= \mathfrak{B}'$; so hätte man $\alpha + \frac{1}{\mathfrak{B}} = \alpha' + \frac{1}{\mathfrak{B}'}$. Nun ist (§. 5. Nr. 3.) seiner Natur nach jeder vollständige Quotient größer als die Einheit, und demnach sowohl $\frac{1}{\mathfrak{B}}$, als auch $\frac{1}{\mathfrak{B}'}$ ein ächter Bruch. Nach der ursprünglichen Bedeutung der continuirlichen Brüche aber ist α nichts anders, als die gröste ganze, in $\frac{A}{B} = \alpha + \frac{1}{\mathfrak{B}}$ steckende Zahl, (§. 5. Nr. 7.) so wie auch aus eben dem Grunde α' die gröste in $\alpha' + \frac{1}{\mathfrak{B}'}$ steckende ganze Zahl bedeutet. Da nun angenommen wird, daß $\alpha + \frac{1}{\mathfrak{B}} = \alpha' + \frac{1}{\mathfrak{B}'}$ sey; so müssen nothwendig die in diesen beiden gleichen (hier angenommenen unächten) Brüchen enthaltenen grösten ganzen Zahlen gleich seyn. Mithin ist $\alpha = \alpha'$; demnach auch $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$,

oder

oder $$\beta + \cfrac{1}{\gamma \cdot \cdot \cdot + \cfrac{1}{\pi}} = \beta' + \cfrac{1}{\gamma' \cdot \cdot \cdot + \cfrac{1}{\pi'}}.$$

Es seyen nun abermal $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ die den Quotienten γ und γ' zugehörigen vollständigen Quotienten: so ist $$\beta + \frac{1}{\mathfrak{C}} = \beta' + \frac{1}{\mathfrak{C}'}$$ Da aber auch hier die vollständigen Quotienten größer, als die Einheit, und somit also $\frac{1}{\mathfrak{C}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{C}'}$ ächte Brüche sind, da ferner die in gleichen unächten Brüchen enthaltenen grösten ganzen Zahlen gleich seyn müssen, so ist auch hier $\beta = \beta'$; folglich auch $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, woraus auf ähnliche Art $\delta = \delta'$ u. s. w. folgt.

Zwei continuirliche Brüche
$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \;\&c.}} \quad \text{und} \quad \alpha' + \cfrac{1}{\beta' + \cfrac{1}{\gamma' + \&c.}}$$
können also nicht einen und eben denselben Werth $\frac{A}{B}$ ausdrücken, wenn sie nicht aus einer gleichen Anzahl gleicher Glieder $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ &c. bestehen. Folglich gibt es keinen andern von $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \&c.}}$ verschiedenen continuirlichen Bruch $\alpha' + \cfrac{1}{\beta' + \cfrac{1}{\gamma' + \&c.}}$, der den Werth des ersteren vollkommen eben so genau ausdrückte, als einen solchen, der mit jenem identisch ist.

1. Coroll.

Jeder continuirliche Bruch ist demnach nothwendig ein bereits auf seine kleinste Benennung gebrachter Bruch: denn wenn der Bruch $\frac{A}{B} = \alpha + \frac{1}{\beta + \&c.}$ auf eine kleinere Benennung $\frac{A'}{B'} = \alpha' + \frac{1}{\beta' + \&c.}$ gebracht werden könnte: so hätte mau also

$$\alpha + \frac{1}{\beta + \&c.} = \alpha' + \frac{1}{\beta' + \&c.}$$

wo α und α', β und β', u. s. w. verschieden wären, welches gegen den so eben erwiesenen Saz streitet.

2. Coroll.

Folglich werden auch die Näherungswerthe

$$\alpha + \frac{1}{\beta}\,;\quad \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma}}\,,\quad \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta}}} \quad \text{u. s. w.}$$

in immer grössern, und auf keine kleinere zurückführbaren Zahlen ausgedrückt.

§. 8. Allgemeines Gesez, die gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche $\frac{\alpha}{1}$, $\alpha + \frac{1}{\beta}$, $\alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma}}$ u. s. w. auf gewöhnliche Brüche zu bringen, und jeden derselben aus zwei unmittelbar vorhergehenden herzuleiten.

Es

Es ist nun nöthig, daß wir das allgemeine Gesez erforschen, nach welchem jeder bis auf einen gewissen Quotienten μ reichende continuirliche Bruch

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma \cdot \atop \cdot \quad \cdot + \cfrac{1}{\mu}}}$$

aus den unmittelbar vorhergehenden, und als bekannt angenommenen, ebenfalls gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüchen, ohne weitläufige Berechnung, und mithin kürzer, als wir oben §. 4. gezeigt, abgeleitet werden könne. Daß es aber nothwendig ein solches Gesetz geben müsse, erkennet man aus dem einförmigen und regelmäßigen Fortschreiten dieser Brüche.

Der natürlichste Weeg scheint dieser zu seyn, daß wir mit einigen der ersten und einfachsten Brüche $\frac{\alpha}{1}$, $\alpha + \frac{1}{\beta}$, $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}$, $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta}}}$ u. s. w. die oben gezeigte Addition und Verwandlung wirklich vornehmen, und da ergibt sich dann folgendes:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{A^\circ}{B^\circ}.$$

$$\alpha + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha\beta + 1}{\beta} = \frac{A^\circ\beta + 1}{B^\circ\beta} = \frac{A^{I}}{B^{I}}.$$

 $\alpha + 1$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}} = \frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1} = \frac{A^{I}\gamma+A^{o}}{B^{I}\gamma+B^{o}} = \frac{A^{II}}{B^{II}}.$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta}}} = \frac{((\alpha\beta+1)\gamma+\alpha)\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta} = \frac{A^{II}\delta+A^{I}}{B^{II}\delta+B^{I}} = \frac{A^{III}}{B^{III}}.$$

Diese vier ersten gefundenen Brüche scheinen nun bereits nach einem sehr einfachen Gesetze fortzugehen. Wenn man nehmlich unter die Reihe der Quotienten

die Brüche $\frac{1}{0}$, $\overset{\alpha,}{\frac{\alpha}{1}} = \frac{A^{o}}{B^{o}}$, $\overset{\beta,}{\frac{\beta A^{o}+1}{\beta B^{o}+0}} = \frac{A^{I}}{B^{I}}$; $\overset{\gamma,}{\frac{\gamma A^{I}+A^{o}}{\gamma B^{I}+B^{o}}} = \frac{A^{II}}{B^{II}}$; $\overset{\delta,}{\frac{\delta A^{II}+A^{I}}{\delta B^{II}+B^{I}}} = \frac{A^{III}}{B^{III}}$.

setzt, wo der vordere Bruch $\frac{1}{0}$ wegen der Analogie und also nur darum eingeführt ist, damit das Gesetz deutlicher in die Augen falle, so ist es also bei den Brüchen

$$\frac{A^{I}}{B^{I}}, \qquad \frac{A^{II}}{B^{II}}, \qquad \frac{A^{III}}{B^{II}},$$

erwiesen, daß der Zähler eines Jeden ein Product aus dem vorhergehenden Zähler in den über ihm stehenden Quotienten, vermehrt um den Zähler des vorletzten Bruchs; der Nenner aber ein Product aus dem Nenner des vorhergehenden Bruchs in eben den über ihm befindlichen Quotienten, vermehrt um den Nenner des vorletzten Bruchs sey.

Um

Um nun zu sehen, ob dieses Gesetz allgemein sey, so müssen wir untersuchen, ob auch der folgende Bruch $\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$ auf eben dieselbe Art aus den beiden unmittelbar vor ihm hergehenden $\frac{A^{III}}{B^{III}}$, $\frac{A^{II}}{B^{II}}$ entspringe, und so weiter ins Unendliche.

Nun entspringt aber nach §. 5. Nr. 6. der Bruch $\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$ aus dem unmittelbar vor ihm hergehenden $\frac{A^{III}}{B^{III}}$, wenn man in diesem, welcher aus Erfahrung $= \frac{A^{I}\,\delta + A^{I}}{B^{I}\,\delta + B^{I}}$ gefunden worden ist, für δ den Werth $\delta + \frac{1}{\varepsilon}$ annimmt. Diß gibt

$$\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}} = \frac{A^{II}\left(\delta + \frac{1}{\varepsilon}\right) + A^{I}}{B^{II}\left(\delta + \frac{1}{\varepsilon}\right) + B^{I}} = \frac{A^{II}\,\delta\,\varepsilon + A^{II} + A^{I}\,\varepsilon}{B^{II}\,\delta\,\varepsilon + B^{II} + B^{I}\,\varepsilon}.$$

$$= \frac{(A^{II}\,\delta + A^{I})\,\varepsilon + A^{II}}{(B^{II}\,\delta + B^{I})\,\varepsilon + B^{II}}.$$ Da nun vermöge obiger Erfahrung

$A^{II}\,\delta + A^{I} = A^{III}$ und $B^{II}\,\delta + B^{I} = B^{III}$ gefunden worden, so ist also

$$\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}} = \frac{A^{III}\,\varepsilon + A^{II}}{B^{III}\,\varepsilon + B^{II}}.$$

Und weil hier Zähler und Nenner eben demselben, bei den vorhergehenden Brüchen beobachteten, Gesetze folgen, so entsteht also der Bruch $\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$ wirklich aus

den beiden unmittelbar vor ihm hergehenden Brüchen eben so, wie diese aus den vor ihnen hergehenden entstanden sind: oder das auf Erfahrung gegründete Entstehungsgesetz der drei ersten Brüche gilt vermöge der Substitution auch von dem vierten, ist also von den vier ersten wahr, und gilt demnach auch von dem fünften: mithin von allen, indem der fünfte aus dem vierten folgt, wie dieser aus dem dritten. §. 5. Nr. 6.

Wenn wir also die Reihe der Quotienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu^{\circ}, \mu, \mu^{I}$, haben, so ist es leicht, die Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche so weit fortzusetzen, als Quotienten vorhanden sind, und man hat:

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{0}, & \frac{\alpha}{1} = \frac{A^{\circ}}{B^{\circ}}, & \frac{\beta A^{\circ} + 1}{\beta B^{\circ} + 0} = \frac{A^{I}}{B^{I}}, & \frac{\gamma A^{I} + A^{\circ}}{\gamma B^{I} + B^{\circ}} = \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \mu^{\circ}, & \mu, & \mu^{I}, \\ \frac{A^{II}}{B^{II}} \ldots\ldots & \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}, & \frac{p}{q}, & \frac{\mu p + p^{\circ}}{\mu q + q^{\circ}} = \frac{p^{I}}{q^{I}} \end{array}$$

wo $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$, $\frac{p}{q}$, je zwei nach diesem Gesetze formirten Brüche, und $\frac{p^{I}}{q^{I}}$ den auf sie folgenden, aus ihnen berechneten Bruch vorstellen.

Anmer:

Anmerkung.

§. 9. Man kann eben diese Brüche, nach eben demselben Gesetze, anstatt horizontal, in senkrechter Kolumne, auch also bilden:

Quotienten.	Nenner. 1	Zähler. 0
α	— — — — 0	1
β	$\alpha.0 + 1 = 1 = B^{o}$.	$\alpha.1 + 0 = \alpha = A^{o}$.
γ	$\beta B^{o} + 0 = \beta = B^{I}$.	$\beta A^{o} + 1 = A^{I}$.
δ	$\gamma B^{I} + B^{o} = B^{II}$.	$\gamma A^{I} + A^{o} = A^{II}$.
ε	$\delta B^{II} + B^{I} = B^{III}$.	$\delta A^{II} + A^{I} = A^{III}$.
ζ	$\varepsilon B^{III} + B^{II} = B^{IIII}$.	$\varepsilon A^{III} + A^{II} = A^{IIII}$.
	&c.	&c.

Dieselbe Anordnung gilt auch für den besondern Fall, da $\alpha = 0$; und mithin der Zähler des Bruchs $\frac{A}{B}$ kleiner, als der Nenner ist. Nur muß in diesem Falle der Werth $\alpha = 0$ wirklich in die Reihe der Quotienten eingetragen werden, wenn die rechte Seite der Zähler, und die linke der Nenner bleiben soll.

§. 10. Beiſpiele zur Uebung.

$$\frac{A}{B} = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{u + \cfrac{1}{v + \cfrac{1}{w.}}}}}}}$$

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \&c.}}}}}}}$$

Schema zum ersten Beispiel.

Quotienten.	Nenner. 1	Zähler. 0
p	— — — — — 0	1
q	$p.0 + 1 = 1.$	$1.p + 0 = p.$
r	$1.q + 0 = q.$	$qp + 1 = p^{II}.$
s	$rq + 1 = r^{I}.$	$rp^{I} + p = r^{II}.$
t	$sr^{I} + q = s^{I}.$	$sr^{II} + p^{I} = s^{II}.$
u	$ts^{I} + r^{I} = t^{I}.$	$ts^{II} + r^{II} = t^{II}.$
v	$ut^{I} + s^{I} = u^{I}.$	$ut^{II} + s^{II} = u^{II}.$
w	$vu^{I} + t^{I} = v^{I}.$	$vu^{II} + t^{II} = v^{II}.$
	$wv^{I} + u^{I} = w^{I}.$	$wv^{II} + u^{II} = w^{II}.$

Beispiele in Zahlen kommen unten vor. Sie machen aber das Gesetz der Bildung der continuirlichen Brüche aus den Quotienten nicht deutlicher, als die hier gebrauchten allgemeinen Zeichen.

Die Ausführung des zweiten Beispiels bleibt dem Leser überlassen.

§. 11. Folgerungen aus dem allgemeinen Gesetze des Fortschreitens der aus dem continuirlichen Bruche

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \&c.}}$$

ent-

entwickelten Reihe von convergirenden Brüchen

$$\frac{1}{0}, \frac{\alpha}{1} = \frac{A^0}{B^0}, \frac{A^I}{B^I}, \frac{A^{II}}{B^{II}} \ldots \frac{p^0}{q^0}, \overset{\mu}{\frac{p}{q}}, \frac{p^I}{q^I}.$$

1. Die Brüche werden in immer größeren Zahlen ausgedrückt, je weiter dieselben fortgesetzt werden. Diß folgt aus der Natur der Bildung dieser Brüche: da $\frac{p^I}{q^I} = \frac{\mu p + p^0}{\mu q + q^0}$ und also jeder Zähler wenigstens die Summe der beiden unmittelbar vor ihm hergehenden Zähler, und jeder Nenner eben so wenigstens die Summe der beiden vor ihm zunächst hergehenden Nenner ist. Daß sich aber bei keinem einzigen der auf diese Art gebildeten convergirenden Brüche Zähler und Nenner verkleinern lassen, sondern dieselbe immer numeri inter se primi seyen, wie §. 7. gezeigt worden, davon werden wir sogleich Nr. 4. noch einen Beweiß geben.

2) Daß die gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche $\frac{A^0}{B^0}$, $\frac{A^I}{B^I}$ &c. abwechslend kleiner und größer sind, als $\frac{A}{B}$, ist zwar bereits oben §. 6. gezeigt worden, es läßt sich aber zierlicher und allgemein auch also erweisen:

Es seyen $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p^I}{q^I}$, drei unmittelbar auf einander folgende Brüche der Reihe $\frac{A^0}{B^0}$, $\frac{A^I}{B^I}$ ꝛc. und μ^0, μ, μ^I ihre zugehörigen Quotienten: so ist nach §. 8.

$\frac{p^I}{q^I} = \frac{\mu p + p^0}{\mu q + q^0}$. Dieser Werth verwandelt sich

aber

aber in den vollständigen Werth von $\frac{A}{B}$ (§. 5. Nr. 1. u. 2.) wenn man anstatt μ den diesem Quotienten zugehörigen vollständigen Quotienten setzt. Dieser sey φ, so haben wir also $\frac{A}{B} = \frac{\varphi p + p^{\circ}}{\varphi q + q^{\circ}}$. Daher ist

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} = \frac{\varphi p + p^{\circ}}{\varphi q + q^{\circ}} - \frac{p}{q} = \frac{p^{\circ}q - q^{\circ}p}{q(\varphi q + q^{\circ})},$$

und $\frac{A}{B} - \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} = \frac{\varphi p + p^{\circ}}{\varphi q + q^{\circ}} - \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} = -\frac{\varphi(p^{\circ}q - q^{\circ}p)}{q^{\circ}(\varphi q + q^{\circ})}$.

Demnach ist der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und seinem Näherungswerthe $\frac{p}{q}$ dem Unterschiede von $\frac{A}{B}$ und dem zunächst vor $\frac{p}{q}$ hergehenden Näherungswerthe $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ in Absicht auf die Zeichen entgegengesetzt.

Wenn $\frac{A}{B} - \frac{p}{q}$ bejaht, und mithin $\frac{A}{B} > \frac{p}{q}$ ist, so ist $\frac{A}{B} - \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ verneint, und also $\frac{A}{B} < \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$. Folglich fällt der Werth von $\frac{A}{B}$ zwischen je zwei unmittelbar auf einander folgende Brüche der Reihe $\frac{A^{\circ}}{B^{\circ}}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$ &c.

Uebrigens folgt hieraus in Absicht auf die Werthe für $\frac{A^{\circ}}{B^{\circ}}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$ &c. daß, wenn α nicht $= 0$ und also $\frac{A}{B}$

ein

ein unächter Bruch ist, und wenn überdiß $\frac{1}{0}$ in der Reihe $\frac{A^{o}}{B^{o}}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$ &c. als der vorderste Bruch angenommen wird, alle Brüche $\frac{A^{o}}{B^{o}}$, $\frac{A^{II}}{B^{II}}$, $\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$, &c. deren Stelle gerade ist, kleiner als $\frac{A}{B}$, und hingegen diejenigen, deren Stelle ungerade ist, wie $\frac{1}{0}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$, $\frac{A^{III}}{B^{III}}$, $\frac{A^{IIIII}}{B^{IIIII}}$ &c. größer als $\frac{A}{B}$ seyn werden: weil $\frac{A^{o}}{B} = \frac{\alpha}{1}$, wie der blose Anblik von $\frac{A}{B} = \alpha + \frac{1}{\beta + \&c.}$ schon zeigt, kleiner als $\frac{A}{B}$, mithin $\frac{A^{I}}{B^{I}}$ wieder größer ist, u. s. w.

Ist $\alpha = 0$, das ist, ist $\frac{A}{B}$ ein ächter Bruch, so ist die Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{\beta}$ &c. und da $\frac{1}{\beta}$ oder der dritte Bruch größer als $\frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma\ \&c.}}$ oder als $\frac{A}{B}$, so ist der vierte wieder kleiner. Mithin sind auch in diesem Falle alle Brüche der Reihe $\frac{A^{o}}{B^{o}}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$ &c. deren Stelle ungerade ist,

größer als $\frac{A}{B}$, und alle deren Stelle gerad ist, kleiner.
(Man sehe §. 6. Zusatz 1.)

3) Wenn wir die vorhergehenden Bezeichnungen immer noch beibehalten, so haben wir in Absicht auf die auf einander folgenden Brüche

$$\overset{\mu^{\circ}}{\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}},\quad \overset{\mu}{\frac{p}{q}},\quad \overset{\mu^{I}}{\frac{p^{I}}{q^{I}}},\quad \overset{\mu^{II}}{\frac{p^{II}}{q^{II}}},\quad \overset{\mu^{III}}{\frac{p^{III}}{q^{III}}}\ \&c.$$

der gegen A convergirenden Reihe,

$$\frac{p^{III}}{q^{III}} = \frac{\mu^{II}p^{II} + p^{I}}{\mu^{II}q^{II} + q^{I}},\ \text{oder}\ p^{III} = \mu^{II}p^{II} + p^{I},$$

und $q^{III} = \mu^{II}q^{II} + q^{I}$.

Daher, wenn man p^{III} mit q^{II} und p^{II} mit q^{III}, also Zähler und Nenner von zwei zunächst auf einander folgenden Brüchen $\frac{p^{III}}{q^{III}}$, $\frac{p^{II}}{q^{II}}$ übers Kreuz multiplicirt, und die Produkte abzieht, ist

$$p^{III}q^{II} - p^{II}q^{III} = (\mu^{II}p^{II} + p^{I})\,q^{II} - p^{II}(\mu^{II}q^{II} + q^{I})$$
$$= p^{I}q^{II} - q^{I}p^{II} = -(p^{II}q^{I} - p^{I}q^{II})$$

Eben so ist $p^{II}q^{I} - p^{I}q^{II} = -(p^{I}q - pq^{I})$ u. dann wieder

$$p^{I}q - pq^{I} = -(pq^{\circ} - p^{\circ}q)\ \text{u. s. w.}$$

Wenn man also in der Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche je zwei zunächst auf einander folgende übers Kreuz (und zwar nach eben derselben Ordnung) multiplicirt, und die Produkte abzieht, so sind die Reste sich der Größe nach zwar gleich; in Absicht

auf

auf das Zeichen aber ist der von dem mten und m — 1ten Bruch herrührende Ueberrest dem von dem m — 1ten und m — 2ten entstandenen gerade entgegengesezt; so daß wenn mit den ersten Brüchen angefangen wird, diese Ueberreste abwechselnd bejaht und verneint sind. Nun ist bei den zwei ersten Brüchen $\frac{1}{0}$, $\frac{\alpha}{1}$ der Ueberrest $\alpha . 0 - 1 . 1 = - 1$. Mithin sind auch die Ueberreste aller folgenden Brüche, wenn man nehmlich bei je zweien derselben $\frac{p^\circ}{q^\circ}$, $\frac{p}{q}$, die sich unmittelbar folgen, Zähler und Nenner übers Kreuz multiplicirt, und die Produkte abzieht, entweder $+ 1$ oder $- 1$, und zwar hat man $pq^\circ - p^\circ q = - 1$, wenn die Stelle des entfernteren der beiden Brüche, nehmlich $\frac{p}{q}$, die zweite, vierte, sechste, also überhaupt gerade ist, und hingegen wird $pq^\circ - p^\circ q = + 1$ seyn, wenn diese Stelle ungerade ist.

Wenn $\alpha = 0$, also $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{\beta}$ u. s. w. die Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche ist, so ist $0 . 0 - 1 . 1 = - 1$,

Ferner $1 . 1 - \beta . 0 = + 1$. u. s. w. folglich erhält man hier $pq^\circ - p^\circ q = - 1$, wenn die Stelle von $\frac{p}{q}$, (die zwei ersten Brüche $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, mit gerechnet) gerade, und $pq^\circ - p^\circ q = + 1$ wenn diese Stelle ungerade ist.

4) Hier-

4) Hieraus folgt, daß alle gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche der Reihe $\frac{1}{0}$, $\frac{A^{0}}{B^{0}}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$, $\frac{A^{II}}{B^{II}}$ &c. bereits auf ihre kleinste Benennung gebracht seyn müssen. Hätten nehmlich z. B. von dem Bruche $\frac{A^{X}}{B^{X}}$ Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler, so müßte, wenn $\frac{A^{IX}}{B^{IX}}$ der vor diesem unmittelbar hergehende convergirende Bruch ist, auch $A^{X} B^{IX} - A^{IX} B^{X}$ eben denselben gemeinschaftlichen Theiler haben. Aber nach dem im vorhergehenden (Nr. 3.) Erwiesenen, ist $A^{X} B^{IX} - A^{IX} B^{X} = \pm 1$. Mithin können A^{X} u. B^{X} ausser der Einheit keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, und sind also unter sich Primzahlen, (numeri inter se primi.)

5) Wir untersuchen nun den Unterschied von je zwei zu nächst auf einander folgenden Brüchen $\frac{p^{0}}{q^{0}}$, $\frac{p}{q}$. Dieser ist $\frac{p q^{0} - p^{0} q}{q q^{0}} = \frac{\pm 1}{q q^{0}}$. Da nun die Werthe von q^{0}, q, u. s. w. in immer größeren Zahlen ausgedrückt werden, je mehr convergirende Brüche vor $\frac{p^{0}}{q^{0}}$, $\frac{p}{q}$ hergehen; so siehet man, daß der Unterschied zwischen je zweien von solchen zu nächst auf einander folgenden Brüchen immer kleiner werden müsse, je weiter sie sich von den ersten Werthen $\frac{1}{0}$, $\frac{A^{0}}{B^{0}}$ ꝛc.

gegen die rechte Hand zu entfernen. Da sie nun nach §. 6. und §. 11. Nr. 2. Gränzen von $\frac{A}{B}$ sind, und diese Gränzen also immer näher zusammen rücken, je weiter die Rechnung fortgesezt wird; so erhellet, daß man sich dadurch dem Werth von $\frac{A}{B}$ desto mehr nähere, je mehr Quotienten und aus ihnen hergeleitete Brüche vorkommen. Wodurch der den Gliedern $\frac{A^\circ}{B^\circ}$, $\frac{A^I}{B^I}$, $\frac{A^{II}}{B^{II}}$ &c. §. 6. Nr. 5. gegebene Nahme: Näherungswerthe von $\frac{A}{B}$, oder gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche aufs neue bestätiget und vollkommen gerechtfertiget wird.

Hätte man demnach für A unzählig viele Quotienten in dem Ausdruck $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta \text{ \&c.}}}}$ so ließen sich also solche Brüche $\frac{p}{q}$, $\frac{p^I}{q^I}$ &c. angeben, die von $\frac{A}{B}$ nur um ein unendlich Weniges unterschieden wären.

6) Es läßt sich aber auch durch eine einfache Rechnung zeigen, daß in der Reihe

$$\frac{1}{0}, \frac{\alpha}{1} = \frac{A^\circ}{B^\circ}, \frac{A^I}{B^I} \ldots \frac{p^\circ}{q^\circ}, \overset{\mu}{\frac{p}{q}}, \frac{p^I}{q^I}$$

jeder

jeder Bruch $\frac{p}{q}$ dem Werth von $\frac{A}{B}$ näher seyn muß, als der vor ihm hergehende $\frac{p^\circ}{q^\circ}$.

Nach §. 8. ist $\frac{p^I}{q^I} = \frac{\mu p + p^\circ}{\mu q + q^\circ}$. Wenn nun aber statt μ abermal der vollständige Quotient φ gesezt wird, so verwandelt sich der Werth von $\frac{\mu p + p^\circ}{\mu q + q^\circ}$ (nach Nro. 2.) in den von $\frac{A}{B}$ selbst, und es ist

$$\frac{A}{B} = \frac{\varphi p + p^\circ}{\varphi q + q^\circ}.$$ Hieraus folgt:

$$\varphi = \frac{p^\circ - \frac{A}{B} q^\circ}{\frac{A}{B} q - p}$$

oder ohne Rücksicht auf das Zeichen:

$$\varphi = \frac{p^\circ - \frac{A}{B} q^\circ.}{p - \frac{A}{B} q}$$

Nun ist aber φ, als ein vollständiger Quotient (§. 6. Nr. 3.) größer als 1: mithin wird auch $p^\circ - \frac{A}{B} q^\circ > p - \frac{A}{B} q$ seyn müssen.

Folglich ist auch

$$\frac{p^\circ}{q^\circ} - \frac{A}{B} < \frac{p - \frac{A}{B} q.}{q^\circ}$$

 Nun

Nun ist, nach der Natur der convergirenden Brüche, $q > q^{\circ}$, also

$$\frac{p - \frac{A}{B}q}{q} < \frac{p - \frac{A}{B}q}{q^{\circ}}.$$ Mithin muß um

so mehr $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} - \frac{A}{B}$, $> \frac{p - \frac{A}{B}q}{q}$, das ist

$$> \frac{p}{q} - \frac{A}{B}$$ seyn.

Demnach ist, ohne Rücksicht auf das Zeichen des Ueberrests, der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ größer, als der von $\frac{A}{B}$ und $\frac{p}{q}$. Folglich rücken die Brüche $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p^{I}}{q^{I}}$, $\frac{p^{II}}{q^{II}}$, dem wahren Werthe immer näher, je weiter sie fortgesezt werden, und jeder derselben ist demnach dem Werthe $\frac{A}{B}$ näher, als alle vorhergehenden.

7) Es lassen sich aber für jedes Glied der Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche, Gränzen finden, zwischen denen dasselbe enthalten ist.

Es seyen nehmlich abermals $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p^{I}}{q^{I}}$, drei dergleichen unmittelbar auf einander folgende Glieder

oder

oder Brüche, und μ°, μ, μ^{I}, die ihnen zugehörigen Quotienten, so haben wir (§. 8.)

$\frac{p^{I}}{q^{I}} = \frac{\mu p + p^{\circ}}{\mu q + q^{\circ}}$. Dieser Werth verwandelt sich in den von $\frac{A}{B}$, wenn (nach §. 6. Nr. 2.) anstatt μ der diesem Quotienten zugehörige vollständige Quotient φ gesezt wird.

Es ist also $\frac{A}{B} = \frac{\varphi p + p^{\circ}}{\varphi q + q^{\circ}}$; und daher

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{q(\varphi q + q^{\circ})}.$$

Da nun seiner Natur nach $\varphi > \mu$, mithin auch $\varphi q + q^{\circ} > \mu q + q^{\circ}$ ist, so ist hinwiederum $\frac{1}{\varphi q + q^{\circ}} < \frac{1}{\mu q + q^{\circ}}$; mithin auch:

$\frac{1}{q(\varphi q + q^{\circ})} < \frac{1}{q(\mu q + q^{\circ})}$, das ist:

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} < \frac{\pm 1}{q(\mu q + q^{\circ})}$$

aber $\mu q + q^{\circ} = q^{I}$; folglich ist

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} < \frac{\pm 1}{q q^{I}}$$

Das ist: der Unterschied zwischen dem wahren Werthe $\frac{A}{B}$ und dem Näherungswerthe $\frac{p}{q}$ ist kleiner als ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner ein Produkt aus dem Nenner eben dieses Bruchs in den des nächstfolgenden ist.

 Da

Da ferner $\varphi < \mu + 1$ seyn muß, (§. 5. Nr. 2.) so ist auch $q\varphi + q^{o} < (\mu + 1)\,q + q^{o}$: das ist $< \mu q + q^{o} + q$, und mithin wiederum

$$\frac{1}{q\varphi + q^{o}} > \frac{1}{\mu q + q^{o} + q},$$ und weil

$\mu q + q^{o} = q^{I}$, so ist demnach $\frac{1}{q\varphi + q^{o}} > \frac{1}{q + q^{I}}$; daher auch

$$\frac{1}{q\,(q\varphi + q^{o})} > \frac{1}{q\,(q + q^{I})},$$ das heißt:

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} > \frac{+\,1}{q\,(q + q^{I})}$$

oder der Unterschied zwischen dem wahren Werthe $\frac{A}{B}$ und dem Näherungswerthe $\frac{p}{q}$, ist größer, als ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, der Nenner aber ein Produkt aus dem Nenner eben dieses Bruchs in die Summe eben desselben und des nächst folgenden Nenners ist.

Lehrsatz.

§. 12. Jeder von den gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüchen ist dem Werthe $\frac{A}{B}$ näher, als jeder andere mögliche Bruch mit kleinerem Nenner.

Beweis.

Wenn $\frac{p}{q}$ ein Glied der Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche, und $\frac{m}{n}$ jeder andere Bruch ist,

dessen Nenner $n < q$ angenommen wird; so soll also gezeigt werden, daß $\frac{p}{q}$ dem Werthe $\frac{A}{B}$ näher kommt, als $\frac{m}{n}$, oder daß, (wenn wir von dem Zeichen des Ueberrests abstrahiren,) $\frac{A}{B} - \frac{p}{q} < \frac{A}{B} - \frac{m}{n}$ sey.

Wenn $\frac{m}{n}$ ein vor $\frac{p}{q}$ hergehendes Glied der Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche ist, so haben wir den Saz §. 11. Nr. 5. bereits erwiesen. Es ist also nur noch übrig zu zeigen, daß derselbe auch von solchen Brüchen gilt, die kein Glied jener Reihe sind. Zu dem Ende sey, wie bisher, $\frac{p^\circ}{q^\circ}$ der vor $\frac{p}{q}$ unmittelbar hergehende gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Bruch, und da nun $\frac{m}{n}$ kein, nach dem Gesez §. 8. abgeleiteter Bruch der Reihe $\frac{A^\circ}{B^\circ}$, $\frac{A^I}{B^I}$, $\frac{A^{II}}{B^{II}}$ &c. ist, so wird auch nicht nothwendig, wie bei den Brüchen dieser Reihe,

$pn - qm = \pm 1$ seyn müssen. Es sey daher

$pn - qm = M$, und eben so

$p^\circ n - q^\circ m = N$

wo wir einstweilen von den Zeichen von M und N abstrahiren, und wo diese Größen, wegen $\frac{p}{q} - \frac{m}{n} > o$ und $\frac{p^\circ}{q^\circ} - \frac{m}{n} > o$, ganze Zahlen vorstellen, die wenigsten

nigstens der Einheit gleich seyn müssen. Aus diesen Werthen folgen aber nachstehende:

$$Mp^\circ = pp^\circ n - p^\circ q m$$
$$Np = pp^\circ n - pq^\circ m,$$

ferner, $Mq^\circ = pq^\circ n - qq^\circ m$, und

$$Nq = p^\circ q n - qq^\circ m;$$

mithin auch diese:

$$Mp^\circ - Np = (pq^\circ - p^\circ q)\, m, \text{ und}$$
$$Mq^\circ - Nq = (pq^\circ - p^\circ q)\, n;$$ oder wegen
$$pq^\circ - p^\circ q = \pm 1,$$

diese: $\pm m = Mp^\circ - Np$

$$\pm n = Mq^\circ - Nq.$$

Nun ist aber, vermöge der Voraussetzung, $n < q$; mithin müssen, es mag nun M bejaht oder verneint seyn, M und N einerley Zeichen haben. (Denn hätten sie verschiedene, so hätten M und — N wieder einerley Zeichen, und es würde sich nothwendig $Mq^\circ - Nq$ in eine bejahte oder verneinte Summe verwandeln, und also wäre n weit größer als q, welches gegen die Annahme streitet.) Dieß nun vorausgesetzt, so haben wir zu Folge der Gleichung für n:

$$\frac{A}{B}n = \frac{A}{B}Mq^\circ - \frac{A}{B}Nq, \text{ und ferner}$$
$$m = Mp^\circ - Np$$

mithin $\frac{A}{B}n - m = \left(\frac{A}{B}q^\circ - p^\circ\right)M - \left(\frac{A}{B}q - p\right)M.$

Es sind aber $\frac{p^\circ}{q^\circ}$, $\frac{p}{q}$ zwei zunächst auf einander folgende gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche, wovon demnach

nach der eine kleiner, der andere größer, als $\frac{A}{B}$ ist.

Also haben $\frac{A}{B} - \frac{p^\circ}{q^\circ}$ und $\frac{A}{B} - \frac{p}{q}$, und mithin auch $\frac{A}{B} q^\circ - p^\circ$, und $\frac{A}{B} q - p$ verschiedene Zeichen.

Wir haben aber so eben erwiesen, daß M und N einerley Zeichen haben. Es müssen also $(\frac{A}{B} q^\circ - p^\circ) M$ und $(\frac{A}{B} q - p) N$ verschiedene, und daher $(\frac{A}{B} q^\circ - p^\circ) M$ und $-(\frac{A}{B} q - p) N$ wieder einerley Zeichen haben. Es ist also $\frac{A}{B} n - m$ der bejahten, oder verneinten Summe von $(\frac{A}{B} q^\circ - p^\circ) M$ und von $(\frac{A}{B} q - p) N$ gleich;

Folglich ist auch

$\frac{A}{B} n - m$ weit größer als $\frac{A}{B} q - p$;

oder $\frac{A}{B} q - p < \frac{A}{B} n - m$. Mithin auch

$$\frac{\frac{A}{B} q - p}{q} < \frac{\frac{A}{B} n - m}{q}, \text{ oder}$$

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} < \frac{A}{B} \, \frac{n - m}{q}$$

aber $q > n$, mithin $\frac{\frac{A}{B} n - m}{q} < \frac{\frac{A}{B} n - m}{n}$

Folg-

Folglich um so mehr

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} < \frac{\frac{A}{B}n - m}{n}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{A}{B} - \frac{p}{q} < \frac{A}{B} - \frac{m}{n}.$$

und somit ist also der Satz erwiesen.

Lehrsatz.

§. 13. Zwischen je zwei zunächst auf einander folgende Brüche einer gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe fällt kein dritter Bruch mit gleichem oder kleinerem Nenner, als der größere Nenner von jenen beiden Brüchen ist.

Beweis.

Wenn also $\frac{p^\circ}{q^\circ}$, $\frac{p}{q}$ zwei zunächst auf einander folgende gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche sind, so kann kein Bruch $\frac{m}{n}$, zwischen $\frac{p^\circ}{q^\circ}$ und $\frac{p}{q}$ fallend, gefunden werden, dessen Nenner n, gleich oder kleiner als q wäre.

Denn gesezt, es sey $\frac{m}{n}$ ein zwischen $\frac{p^\circ}{q^\circ}$ und $\frac{p}{q}$ fallender Bruch, wo zugleich $n \overline{\overline{<}} q$ wäre, so müßte also $\frac{m}{n} - \frac{p^\circ}{q^\circ} < \frac{p}{q} - \frac{p^\circ}{q^\circ}$ und also auch

$$\frac{mq^\circ - np^\circ}{nq^\circ} < \frac{pq^\circ - p^\circ q}{qq^\circ}, \text{ das ist } < \pm \frac{1}{qq^\circ},.$$

und

und so mit also auch $\frac{mq^\circ - np^\circ}{n} < \pm \frac{1}{q}$ seyn.

Aber n ist, nach der Voraussetzung $\leqq$ q, also $\frac{1}{n} \geqq \frac{1}{q}$; und da $mq^\circ - np^\circ > 0$, so wäre also in jedem Falle

$$\frac{mq^\circ - np^\circ}{n} > \pm \frac{1}{q}.$$

Die Annahme, daß $\frac{m}{n}$ zwischen $\frac{p^\circ}{q^\circ}$ und $\frac{p}{q}$ falle, und doch dabei $n \leqq q$ sey, führt also auf einen Widerspruch. Es fällt daher zwischen zwei zunächst auf einander folgende gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche $\frac{p^\circ}{q^\circ}$, $\frac{p}{q}$ kein dritter mit gleichem oder kleinerem Nenner als q.

Zusatz.

§. 14. Da zwei zunächst auf einander folgende Brüche $\frac{p^\circ}{q^\circ}$, $\frac{p}{q}$ einer gegen eine gewisse Gränze convergirenden Reihe solche sind, deren Unterschied gleich der Einheit, dividirt mit dem Product der Nenner beider Brüche ist; so drückt man den vorhergehenden Satz auch eben so richtig also aus: zwischen zwei Brüche, deren Unterschied gleich der Einheit, dividirt mit dem Produkt ihrer beiden Nenner ist, fällt kein Bruch mit gleichem oder kleinerem Nenner, als der größere jener beiden Nenner ist.

§. 15.

§. 15. Von Brüchen, die zwischen die Glieder der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe von continuirlichen Brüchen können eingeschaltet werden.

Es lassen sich, unter gewissen Umständen, zwischen die aus $\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \&c.}}$ abgeleiteten convergirenden continuirlichen Brüche noch andere einschalten, die ebenfalls Näherungswerthe von $\frac{A}{B}$ sind, und mit denen es folgende Bewandniß hat:

Es sey, wie bisher, die gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Reihe von Brüchen diese:

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \ldots\ldots \varkappa & \lambda & \mu & \nu & \\ \frac{1}{0}, & \frac{A^{0}}{B^{0}} = \alpha, & \frac{A^{I}}{B^{I}}, & \frac{A^{II}}{B^{II}} \ldots\ldots \frac{A^{IX}}{B^{IX}}, & \frac{A^{X}}{B^{X}}, & \frac{A^{XI}}{B^{XI}}, & \frac{A^{XII}}{B^{XII}}, & \&c. \end{array}$$

so sind: nach §. 11. Nr. 2. folgende hievon kleiner, als $\frac{A}{B}$:

$$\frac{A^{0}}{B^{0}}, \quad \frac{A^{II}}{B^{II}}, \quad \frac{A^{IV}}{B^{IV}} \ldots\ldots \frac{A^{X}}{B^{X}}, \quad \frac{A^{XII}}{B^{XII}}, \ \&c.$$

und folgende größer, als $\frac{A}{B}$:

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{A^{I}}{B^{I}}, \quad \frac{A^{III}}{B^{III}} \ldots\ldots\ldots \frac{A^{IX}}{B^{IX}}, \quad \frac{A^{XI}}{B^{XI}}, \ \&c.$$

Wir betrachten zuerst die Reihe der kleineren.

In dieser ziehe man je zwei zunächst auf einander folgenden Glieder oder Brüche, z. B. $\frac{A^{XII}}{B^{XII}}$, $\frac{A^{X}}{B^{X}}$ von

einander

einander ab, so ist der Ueberrest $= \frac{A^{XII}}{B^{XII}} - \frac{A^{X}}{B^{X}}$.

Nun ist aber, nach dem Gesetze der Bildung dieser Brüche, (§. 8.)

$A^{XII} = \mu A^{XI} + A^{X}$, und $B^{XII} = \mu B^{XI} + B^{X}$; daher

$$\frac{A^{XII}}{B^{XII}} - \frac{A^{X}}{B^{X}} = \frac{\mu A^{XI} + A^{X}}{\mu B^{XI} + B^{X}} - \frac{A^{X}}{B^{X}} = \frac{\mu(A^{XI}B^{X} - A^{X}B^{XI})}{B^{X}B^{XII}}$$

aber $A^{XI}B^{X} - A^{X}B^{XI} = +1$; weil (§. 11. Nr. 3.) $\frac{A^{XI}}{B^{XI}}$ der dreizehnte Bruch von $\frac{1}{0}$ an gerechnet, und seine Stelle also ungerade ist.

Mithin ist $\frac{A^{XII}}{B^{XII}} - \frac{A^{X}}{B^{X}} = + \frac{\mu}{B^{X}\,B^{XII}}$.

Ist nun μ gerade der Einheit gleich, so läßt sich, wie §. 13. und §. 14. erwiesen worden, kein Bruch zwischen B^{X} und B^{XII} mit kleinerem Nenner, als B^{XII} denken; ist aber der Quotient μ größer als die Einheit, so paßt der §. 13. und 14. erwiesene Satz hier nicht mehr, und daß alsdann zwischen $\frac{A^{X}}{B^{X}}$ und $\frac{A^{XII}}{B^{XII}}$ oder $\frac{\mu A^{XI} + A^{X}}{\mu B^{XI} + B^{X}}$ mehrere Brüche möglich seyen, erhellet also:

Man denke sich die Reihe:

$$\frac{1\,A^{XI} + A^{X}}{1\,B^{XI} + B^{X}};\ \frac{2\,A^{XI} + A^{X}}{2\,B^{XI} + B^{X}};\ \frac{3\,A^{XI} + A^{X}}{3\,B^{XI} + B^{X}} \ldots\ldots$$

$$\frac{(\mu - 1)\,A^{XI} + A^{X}}{(\mu - 1)\,B^{XI} + B^{X}}.$$

wo

wo Zähler und Nenner nach arithmetischer Progression fortgehen, so ist folgendes leicht zu erweisen:

1) Das erste Glied dieser Reihe, nehmlich $\frac{1\,A^{xI} + A^{x}}{1\,B^{xI} + B^{x}}$

ist größer als $\frac{A^{x}}{B^{x}}$; denn $\frac{1\,A^{xI} + A^{x}}{1\,B^{xI} + B^{x}} - \frac{A^{x}}{B^{x}} =$

$\frac{+\,1}{B^{x}\,(1\,B^{xI} + B^{x})}$.

2) Das zweite Glied derselben, oder $\frac{2\,A^{xI} + A^{x}}{2\,B^{xI} + B^{x}}$,

ist größer als das erste, und das dritte größer, als das zweite, u. s. w. denn der Unterschied von je zweyen zunächst folgenden ist

$$= \frac{(\mu - 1)\,A^{xI} + A^{x}}{(\mu - 1)\,B^{xI} + B^{x}} - \frac{(\mu - 2)\,A^{xI} + A^{x}}{(\mu - 2)\,B^{xI} + B^{x}} =$$

$$\frac{(\mu - 1)\,(A^{xI}B^{x} - A^{x}B^{xI}) - (\mu - 2)\,(A^{xI}B^{x} - A^{x}B^{xI})}{(\mu - 1)\,(B^{xI} + B^{x})\quad(\mu - 2)\,(B^{xI} + B^{x})}$$

aber $A^{xI}\,B^{x} - A^{x}\,B^{xI} = +\,1$. (nach §. 11. Nr. 3.) folglich ist dieser Unterschied zweier zunächst folgender Glieder jener Reihe, nehmlich des $\mu - 1$ und $\mu - 2$ten

$$= \frac{+\,1}{\text{mit dem Produkt ihrer Nenner.}}$$

Das heißt: das folgende Glied ist größer, als das vorhergehende. Endlich

3) ist das letzte oder höchste Glied $\frac{(\mu - 1)\,A^{xI} + A^{x}}{(\mu - 1)\,B^{xI} + B^{x}}$ kleiner, als $\frac{\mu\,A^{xI} + A^{x}}{\mu\,B^{xI} + B^{x}}$, d. i. als $\frac{A^{xII}}{B^{xII}}$. Denn

$$\frac{\mu A^{XI} + A^{X}}{\mu B^{XI} + B^{X}} - \frac{(\mu - 1)\, A^{XI} + A^{X}}{(\mu - 1)\, B^{XI} + B^{X}} = \frac{+\,1}{}$$

mit dem Produkt beider Nenner.

Da nun, nach Nr. 1. das niedrigste Glied der Reihe $\frac{1\, A^{XI} + A^{X}}{1\, B^{XI} + B^{X}}$ .... größer, als $\frac{A^{X}}{B^{X}}$, nach Nr. 2. die nächstfolgenden immer wachsen, und nach Nr. 3. das höchste Glied kleiner, als $\frac{A^{XII}}{B^{XII}}$ ist, so sind also alle Glieder jener Reihe zwischen $\frac{A^{X}}{B^{X}}$ und $\frac{A^{XII}}{B^{XII}}$ enthalten, und ihre Anzahl ist so groß, als $\mu - 1$ Einheiten hat.

Es nähern sich aber diese eingeschalteten Brüche dem Werthe von $\frac{A^{XII}}{B^{XII}}$ immer mehr: denn, nach dem so eben erwiesenen, ist der nächstfolgende immer etwas weniges größer, als der vorhergehende, und dabei der lezte gleichwohl kleiner, als $\frac{A^{XII}}{B^{XII}}$. Und da überdiß der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und $\frac{A^{X}}{B}$, nach der Natur der continuirlichen Brüche größer ist, als der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und $\frac{A^{XII}}{B^{XII}}$; jene eingeschalteten Brüche aber zwischen $\frac{A^{X}}{B^{X}}$ und $\frac{A^{II}}{B^{XII}}$ stehen: so muß nothwendig der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und einem jeden einzelnen derselben kleiner

seyn,

seyn, als der von $\frac{A}{B}$ und von $\frac{A^x}{B^x}$, und zwar um so mehr kleiner, je näher jener eingeschaltete der Gränze $\frac{A^{xII}}{B^{xII}}$ liegt. Es sind demnach diese sämmtlichen eingeschalteten Brüche neue Näherungswerthe von $\frac{A}{B}$, die mit denen der Reihe für $\frac{A}{B}$ auch noch diß gemein haben, daß da der Unterschied zwischen je zwei zunächst folgenden $= \frac{1}{\text{Produkt beider Nenner}}$ ist, nach §. 13. 14. kein dritter Bruch zwischen ihnen liegen kann, dessen Nenner dem grösten Nenner dieser beiden Brüche entweder gleich ist, oder kleiner als derselbe wäre.

Demnach lassen sich in der Reihe

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta\ldots\ldots & \lambda, & \mu, & \nu, & \varrho, & \\ \frac{1}{0}, & \frac{\alpha}{1} = \frac{A^0}{B^0}, & \frac{A^I}{B^I}, & \frac{A^{II}}{B^{II}}\ldots\ldots & \frac{p^0}{q^0}, & \frac{p}{q}, & \frac{p^I}{q^I}, & \frac{p^{II}}{q^{II}} & \text{\&c.} \end{matrix}$$

zwischen je zwei Glieder $\frac{p^0}{q^0}$ und $\frac{p^I}{p^I} = \frac{\mu p + p^0}{\mu q + q^0}$ welche beide kleiner als $\frac{A}{B}$ sind, und sich als solche zunächst folgen, so viel Näherrungswerthe von $\frac{A}{B}$ von der Form

$$\frac{1p + p^0}{1q + q^0}, \frac{2p + p^0}{2q + q^0}, \frac{3p + p^0}{3q + q^0}\ldots\ldots\frac{(\mu - 1)p + p^0}{(\mu - 1)q + q^0}$$

einschalten, als in $\mu - 1$ Einheiten sind, wo μ derjenige Quotient ist, der den Bruch

$\frac{p^I}{q^I} = \frac{\mu p + p^0}{\mu q + q^0}$ bestimmt.

Durch

Durch Schlüße, die den vorhergehenden vollkommen ähnlich sind, läßt sich in Absicht auf die Glieder

$\frac{1}{0}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$, $\frac{A^{III}}{B^{III}}$ .... $\frac{p}{q}$, $\frac{p^{II}}{q^{II}}$ &c.

die größer, als $\frac{A}{B}$ sind, zeigen, daß, z. B. zwischen je zwei sich als solche zunächst folgende $\frac{p}{q}$, $\frac{p^{II}}{q^{II}}$ welches leztere $= \frac{\gamma p^{I} + p}{\gamma q^{I} + q}$ ist, so viele neue Näherungswerthe für $\frac{A}{B}$ von der Form

$$\frac{1 p^{I} + p}{1 q^{I} + q}, \frac{2 p^{I} + p}{2 q^{I} + q}, \frac{3 p^{I} + p}{3 q^{I} + q} \ldots \frac{(\gamma - 1) p^{I} + p}{(\gamma - 1) q^{I} + q}$$

eingeschaltet werden können, als in $\gamma - 1$ Einheiten sind.

Betrachten wir also die Reihe für $\frac{A}{B}$; so stehen zwischen $\frac{1}{0}$, und $\frac{A^{I}}{B^{I}} = \frac{\alpha \beta + 1}{1 \beta + 0}$, welche Werthe beide $> \frac{A}{B}$ sind, folgende Näherungswerthe

$$\frac{\alpha + 1}{1}, \frac{2\alpha + 1}{2}, \frac{3\alpha + 1}{3} \ldots \frac{(\beta - 1)\alpha + 1}{\beta - 1}.$$

mithin so viele, als $\beta - 1$ Einheiten hat. Diese sind sämmtlich ebenfalls $> \frac{A}{B}$; aber dieser Gränze näher, als $\frac{1}{0}$.

Eben so sind zwischen $\frac{A^{o}}{B^{o}}$ und $\frac{A^{II}}{B^{II}} = \frac{\gamma A^{I} + A^{o}}{\gamma B^{I} + B^{o}}$, welche beide Brüche kleiner als $\frac{A}{B}$ sind, so viele einge-

schaltete Näherungswerthe von der Form

$$\frac{1\,A^{I}+A^{o}}{1\,B^{I}+B^{o}},\ \frac{2\,A^{I}+A^{o}}{2\,B^{I}+B^{o}}\ \ldots\ \frac{(\gamma-1)\,A^{I}+A^{o}}{(\gamma-1)\,B^{I}+B^{o}},$$

oder wegen $A^{o}=\alpha$, und $B^{o}=1$, von der Form

$$\frac{A^{I}+\alpha}{B^{I}+1},\ \frac{2A^{I}+\alpha}{2B^{I}+1},\ \frac{3A^{I}+\alpha}{3B^{I}+1}\ldots\frac{(\gamma-1)A^{I}+\alpha}{(\gamma-1)B^{I}+1};$$

als in $\gamma-1$ Einheiten sind.

Eben so sind die beiden Brüche $\frac{A^{III}}{B^{III}}$ und $\frac{A^{I}}{B^{I}}$ wieder größer als $\frac{A}{B}$, und da $\frac{A^{III}}{B^{III}}=\frac{\delta\,A^{II}+A^{I}}{\delta\,B^{II}+B^{I}}$ ist, so lassen sich zwischen dieselbe so viel neue Näherungswerthe von der Form

$$\frac{1A^{II}+A^{I}}{1B^{II}+B^{I}},\ \frac{2A^{II}+A^{I}}{2B^{II}+B^{I}},\ \frac{3A^{II}+A^{I}}{3B^{II}+B^{I}}\ldots\frac{(\delta-1)\,A^{II}+A^{I}}{(\delta-1\,B^{II}+B^{I}}$$

einschalten, die ebenfalls sämmtlich $>\frac{A}{B}$ seyn werden, als in $\delta-1$ Einheiten enthalten sind.

Beispiele hievon in Zahlen stehen unten §. 27.

§. 16. Man nennt die nach dem Gesez §. 8. aus den Quotienten α, β, γ, ꝛc. abgeleiteten, gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche $\frac{A^{o}}{B^{o}}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$, $\frac{A^{II}}{B^{II}}$ ꝛc. Hauptbrüche, und die dazwischen eingeschalteten mit arithmetisch wachsenden Zählern und Nennern: Nebenbrüche, oder eingeschaltete Brüche.

Von continuirlichen Brüchen, in welchen verneinte Glieder vorkommen.

§. 17. Brüche mit verneinten Gliedern können durch leichte Substitutionen auf solche mit bejahten Gliedern zurückgeführt werden.

1) Wenn das verneinte Zeichen in dem Nenner ist, so kann dasselbe dadurch in den Zähler übergetragen werden, daß man nicht nur in diesem, sondern auch in dem unmittelbar auf ihn folgenden das Zeichen verändert: so ist z. B.

$$\alpha + \cfrac{1}{-\beta + \cfrac{1}{\gamma}} = \alpha - \cfrac{1}{\beta - \cfrac{1}{\gamma}}$$

, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man beide Brüche in gewöhnliche verwandelt: oder auch dadurch, daß man sich des Satzes erinnert, daß der Werth eines Bruchs ungeändert bleibt, wenn man seinen Zähler und Nenner mit jeder beliebigen Größe, also auch mit -1 multiplicirt:

mithin ist $$\cfrac{+1}{-\beta + \cfrac{1}{\gamma}} = \cfrac{-1}{+\beta - \cfrac{1}{\gamma}}.$$

2) Da ferner $$\alpha - \frac{1}{\beta} = \alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta - 1}}$$

wie man sich ebenfalls leicht überzeugen kann, wenn man beide Ausdrücke auf gewöhnliche Brüche bringt: so hat man also hiemit ein Mittel, jeden Bruch mit verneinten Zählern auf einen Bruch mit bejahten Gliedern zurück führen.

Es sey z. B. $\frac{A}{B} = \alpha - \cfrac{1}{\beta - \cfrac{1}{\gamma}}$, so setze man vordersamst $\beta - \frac{1}{\gamma} = M$; dann ist unser Bruch

$$\frac{A}{B} = \alpha - \frac{1}{M} = \alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{M - 1}}$$

Aber $M - 1 = \beta - \frac{1}{\gamma}$, und diese Größe ist $= \beta - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma - 1}}$; folglich ist

$$\frac{A}{B} \text{ oder } \alpha - \cfrac{1}{\beta - \cfrac{1}{\gamma}} = \alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma - 1}}}}$$

welcher Ausdruck zwar etwas zusammengesetzter ist, aber aus lauter bejahten Gliedern besteht, und also auf die obigen Formen zurück gebracht ist. Auf völlig ähnliche Art verfährt man, wenn die Kette von verneinten Größen noch größer ist: Daher ich mich hiebei nicht länger aufhalte, und den Lesern zur eigenen Uebung diese Beispiele überlasse, wovon das erste berechnet ist, die andere nicht.

$$\frac{A}{B} = \alpha + \cfrac{1}{\beta - \cfrac{1}{\gamma - \cfrac{1}{\delta - \varepsilon + \cfrac{1}{\xi}}}}$$

$$= \alpha + \cfrac{1}{\beta - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma - 1 + \cfrac{1}{\varepsilon - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\xi}}}}}}$$

Ferner

$$\frac{A}{B} = \alpha - \cfrac{1}{\beta - \cfrac{1}{\gamma - \cfrac{1}{\delta - \cfrac{1}{\varepsilon}}}}, \text{ und } \frac{A}{B} = -\cfrac{1}{-\beta + \cfrac{1}{-\delta - \cfrac{1}{\varepsilon - \cfrac{1}{\zeta}}}}$$

Da es ferner auch nůzlich seyn kann, verneinte te Glieder in einem continuirlichen Bruch einzuführen, so merken wir auch folgende gleichbedeutende Ausdrůcke:

$$\alpha + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta}} = \alpha + 1 - \cfrac{1}{\beta + 1}$$

Ferner

$$\alpha + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta}}} = \alpha + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\beta}}$$

und

$$\alpha + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta}}}} = \alpha + 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{\beta + 1}}$$

§. 18. Von den continuirlichen Brüchen von der Form

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \&c.}}}}$$

Wir haben bisher nur solche continuirliche Brüche betrachtet, deren Zähler sämtlich der Einheit gleich waren. Wir gehen nun jezt zu derjenigen Gattung über, wo die Zähler β, γ, &c. jede ganze oder gebrochene Zahl vorstellen können. Dabei aber nehmen wir an, daß die Zahlen a, b, c, &c. nicht nur ganze bejahte Zahlen, sondern auch größer, als die zugehörigen Zähler seyen: und somit läßt sich die obige Art, die Natur und Eigenschaften der continuirlichen Brüche von der Form $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \&c.}}$

zu erforschen, auch auf diese allgemeinere Gattung

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \&c.}}$$

anwenden. Es sey nehmlich $\frac{A}{B}$ diejenige Größe, die dem entweder ins unendliche fortlaufenden, oder abgebrochenen continuirlichen Bruche

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \&c.}}}}$$

voll-

vollkommen gleich ist. Dieß vorausgeschickt, so läßt sich durch Schlüße, die denen oben gebrauchten ähnlich sind, und die wir aus diesem Grunde nicht wiederholen werden, folgendes darthun.

1) Die Art, einen continuirlichen Bruch

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \&c.}}$$

in einen gewöhnlichen zu verwandeln, ist vollkommen eben die §. 4. gezeigte: so wie auch die Benennungen Quotient und vollständiger Quotient eben falls dieselben sind, wie §. 5. Nr. 2.

2) Der Werth von $\frac{A}{B}$ kann auf mancherlei Art, und zwar also vorgestellt werden:

$$a + \frac{\beta}{B},\quad a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{C}},\quad a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{D}}}\ \&c.$$

wo B der vollständige Quotient von b, C der von c, D der von d ist, u. s. w.

3) Wenn man anstatt der vollständigen Quotienten nur die in ihnen enthaltenen höchsten ganzen Zahlen oder Quotienten b, c, d &c. sezt, und die Brüche

$$\frac{a}{1},\quad a + \frac{\beta}{b},\quad a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c}}\ \&c.$$

besonders betrachtet, so nähern sich dieselbe dem Werthe $\frac{A}{B}$ immer mehr, je mehr Glieder der continuirliche Bruch hat. Sie heißen daher gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche, wie §. 6. Nr. 5.

4) Der

4) Der Werth von $\frac{A}{B}$ ist abwechselnd größer und kleiner als diese gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Brüche, wie §. 6. und §. 11. Nr. 2. Je zwei zunächst auf einander folgende sind also Gränzen von $\frac{A}{B}$.

5) Jeder einzelne derselben kann leicht aus dem zunächst vorhergehenden hergeleitet werden. Z. B. aus $a + \frac{\beta}{b}$ folgt der nächste, wenn man für b den Werth $b + \frac{\gamma}{c}$ sezt, und aus $a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c}}$ folgt wieder der nächste nach diesem, wenn anstatt c der Werth $c + \frac{\delta}{d}$ angenommen wird, u. s. w.

6) Die Art, das Gesez zu entdecken, nach welchem die auf gewöhnliche Brüche reducirten continuirlichen gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche $\frac{a}{1}$, $a + \frac{\beta}{b}$, $a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c}}$ &c. sich auseinander entwickeln, wird der §. 8. gebrauchten ähnlich seyn. Sie folgt im nächsten Paragraphen.

§. 19. Gesez der Entwickelung der in gewöhnliche Brüche verwandelten Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden continuirlichen Brüche:

$$\frac{a}{1}\,;\; a + \frac{\beta}{b},\quad a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c}},\quad a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d}}}\ \&c.$$

Diese

Diese Brüche auf die §. 4. gezeigte Art in gewöhnliche verwandelt, geben die Reihe

$$\frac{a}{1};\quad \frac{ab+\beta}{b};\quad \frac{(ab+\beta)c+a\gamma}{bc+\gamma};$$

$$\frac{(abc+a\gamma+\beta c)\,d+(ab+\beta)\,\delta}{(bc+\gamma)\,d\quad+\quad b\,\delta}.$$

Um nun das Gesez dieser ersten Glieder deutlicher zu übersehen, schreibe man über die Reihe, der man noch den Bruch $\frac{1}{0}$ vorsezt, die Quotienten a, b, c &c. und unter dieselben die Zähler β, γ, δ, &c. und mache folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc} a, & b, & c, \\ \frac{1}{0},\ \frac{a}{1}=\frac{A^{0}}{B^{0}}, & \frac{ab+\beta}{b}=\frac{A^{0}b+1.\beta}{B^{0}b+0.b}= & \frac{A^{I}}{B^{I}}, \\ \beta, & \gamma, & \delta, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & d, & \varepsilon, \\ \frac{A^{I}c+A^{0}\gamma}{B^{I}c+B^{0}\gamma}= & \frac{A^{II}}{B^{II}};\ \frac{A^{II}d+A^{I}\delta}{B^{II}d+B^{I}\delta}= & \frac{A^{III}}{B^{III}}, \\ & \varepsilon, & \zeta, \end{array}$$

so erhellet, daß bei diesen ersten Brüchen der Zähler eines jeden eine Summe von dem Produkt des vorhergehenden Zählers in dem über ihm stehenden Quotienten nnd von dem Produkt des vorlezten Zählers in das unter ihm stehende Glied der Reihe α, β, γ &c. sey. Eben so ist jeder Nenner eine Summe des Produkts aus dem vorhergehenden Nenner in eben den über ihm stehenden Quotienten, und des Produkts aus dem vorlezten Nenner in eben das unter ihm stehende Glied der Reihe α, β, γ, &c.

Aber

Aber es fragt sich jezt, ob diß bis zu $\frac{A^{III}}{B^{III}}$ richtige Gesez auch von $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$, $\frac{A^{V}}{B^{V}}$ und überhaupt von allen Gliedern der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe gelte?

Es entsteht aber das Glied $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$ aus $\frac{A^{III}}{B^{III}}$, wenn man im lezteren anstatt d den Werth $d + \frac{\varepsilon}{e}$ sezt (§. 5. Nr. 6.) und da vermöge obiger Rechnung,

$$\frac{A^{III}}{B^{III}} = \frac{A^{II}d + A^{I}\delta}{B^{II}d + B^{I}\delta}$$ gefunden worden:

so ist demnach

$$\frac{A^{IV}}{B^{IV}} = \frac{A^{II}\left(d+\frac{\varepsilon}{e}\right) + A^{I}\delta}{B^{II}\left(d+\frac{\varepsilon}{e}\right) + B^{I}\delta} = \frac{A^{II}d + A^{I}\delta + \frac{A^{II}\varepsilon}{e}}{B^{II}d + B^{I}\delta + \frac{B^{II}\varepsilon}{e}}$$

Aber $A^{II}d + A^{I}\delta = A^{III}$, und $B^{II}d + B^{I}\delta = B^{III}$, mithin ist $\frac{A^{IV}}{B^{IV}} = \frac{A^{III}e + A^{II}\varepsilon}{B^{III}e + B^{II}\varepsilon}$. Es gilt also das bis zu $\frac{A^{III}}{B^{III}}$ durch Rechnung als richtig erkannte Gesez, nun auch von $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$.

Es beruhet aber der so eben gegebene Beweiß, daß das bis zu $\frac{A^{III}}{B^{III}}$ richtige Gesez auch von $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$ gelte, einzig und allein auf dem Umstande, daß $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$ aus $\frac{A^{III}}{B^{III}}$ ent=

springe,

springe, wenn im lezteren Bruche für d der Werth $d + \frac{\varepsilon}{e}$ angenommen wird. Da nun aber auch $\frac{A^{V}}{B^{V}}$ ebenfalls aus $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$ entspringt, wenn man für e den Werth $e + \frac{\zeta}{f}$ sezt: das heißt: da $\frac{A^{V}}{B^{V}}$ aus $\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$ eben so entspringt, wie $\frac{A^{IIII}}{B^{IIII}}$ aus $\frac{A^{III}}{B^{III}}$, u. s. w. so gilt also dasselbe Gesez von allen folgenden Brüchen, und ist demnach allgemein.

Wenn daher die Reihe $\frac{A}{B}$ bis auf die Glieder

$$\begin{array}{cccc} r & s & t & u \\ \ldots\ldots \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}, & \frac{p}{q}, & \frac{p^{I}}{q^{I}}, & \frac{p^{II}}{q^{II}} \ldots\ldots \\ \varkappa & \lambda & \mu & \nu \end{array}$$

fortgesezt ist, so hat man

$\frac{p^{I}}{q^{I}} = \frac{p\,s + p^{\circ}\varkappa}{q\,s + q^{\circ}\varkappa}$, und eben so auch

$\frac{p^{II}}{q^{II}} = \frac{p^{I}t + p\lambda}{q^{I}t + q\lambda}$ u. s. w.

§. 19. Folgerungen aus dem vorhergehenden Geseze des Fortschreitens der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe von continuirlichen Brüchen.

1) Man betrachte irgend ein Glied $\frac{p^{I}}{q^{I}}$ dieser Reihe, und sein nächst vorhergehendes, so ist:

$p^{I} =$

$p^{I} = p\,s + p^{\circ}\varkappa$, und $q^{I} = q\,s + q^{\circ}\varkappa$: demnach $p^{I}q = pqs + p^{\circ}q\varkappa$, und $q^{I}p = pqs + pq^{\circ}\varkappa$; folglich $p^{I}q - q^{I}p = -(pq^{\circ} - p^{\circ}q)\,\varkappa$. Mithin haben, da $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varkappa$ lauter bejahte Zahlen bedeuten, $p^{I}q - q^{I}p$, und $pq^{\circ} - p^{\circ}q$ verkehrte Zeichen, wie oben §. 11. Nr. 3. und da ferner, wenn $\frac{p^{\circ\circ}}{q^{\circ\circ}}$ der vor $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ unmittelbar hergehende Bruch ist, aus eben dem Grunde auch $pq^{\circ} - p^{\circ}q = -(p^{\circ}q^{\circ\circ} - p^{\circ\circ}q^{\circ})\,\eta$ seyn muß; und so immer weiter bis auf die vordersten Brüche $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+\beta}{b}$, wo der Unterschied der übers Kreuz multiplicirten Zähler und Nenner $= ab + \beta - ab = \beta$ ist; so hat man also $p^{I}q - pq^{I} = \pm\,\beta\gamma\delta \ldots \varkappa$. Das heißt: Wenn die Zähler und Nenner zweier zunächst auf einander folgenden gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche übers Kreuz multiplicirt werden, so ist der Unterschied dieser Produkte (ohne Rücksicht auf das Zeichen) dem Produkt aller vor den beiden Brüchen hergehenden Zähler oder Anzeiger $\beta, \gamma, \delta \ldots \varkappa$, gleich. In Absicht auf das Zeichen dieses Unterschieds aber gilt die oben gegebene Regel §. 11. Nr. 2. und zwar aus gleichen Gründen.

2) Es sey in $\frac{p^{I}}{q^{I}} = \frac{p\,s + p^{\circ}\varkappa}{q\,s + q^{\circ}\varkappa}$, S der zu s gehörige vollständige Quotient, so verwandelt sich nach §. 5. Nr. 12. der Werth von $\frac{p^{I}}{q^{I}}$ in den von $\frac{A}{B}$, wenn

S

S anstatt f angenommen wird, das ist, man hat:

$\frac{A}{B} = \frac{pS + p^{\circ}\varkappa}{qS + q^{\circ}\varkappa}$, daher ist $\frac{A}{B} - \frac{p}{q} = \frac{+(p^{\circ}q - pq^{\circ})\varkappa}{q(qS + q^{\circ}\varkappa)}$

$= \pm \frac{\beta\,\gamma\,\delta \ldots\ldots \varkappa}{q(qS + q^{\circ}\varkappa)}$, und eben so auch

$$\frac{A}{B} - \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} = \mp \frac{\beta\gamma\delta \ldots\ldots \eta\, S}{q(qS + q^{\circ}\varkappa)}$$

gleich wie aber $\beta < b$, $\gamma < c$ u. s. w. so ist auch $\varkappa < f$, und da hinwiederum $f < S$ ist; so ist $\varkappa$ um so mehr kleiner als S, und demnach auch, ohne Rücksicht auf das Zeichen, $\frac{A}{B} - \frac{p}{q}$ kleiner, als $\frac{A}{B} - \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$.

Demnach ist jedes Glied der Reihe

$$\frac{A^{\circ}}{B^{\circ}}, \frac{A^{I}}{B^{I}}, \frac{A^{II}}{B^{II}} \ldots\ldots \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}, \frac{p}{q}, \frac{p^{I}}{q^{I}} \ldots\ldots$$

dem Werth $\frac{A}{B}$ näher, als alle vorhergehenden, wie §. 11. Nr. 5.

3) Die Zähler und Nenner eines jeden Glieds dieser gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe nehmen, nach dem Gesez ihres Entstehens, immer mehr und mehr zu, und können nie einen gemeinschaftlichen Theiler haben, sondern jedes Glied ist vielmehr ein bereits auf seine kleinste Benennung gebrachter Bruch.

Denn gesezt, in der bis zu den Gliedern

$$\begin{array}{cccccc} r & s & t & u & v & \\ \frac{p^{oo}}{q^{oo}}, & \frac{p^{o}}{q^{o}}, & \frac{p}{q}, & \frac{p^{I}}{q^{I}}, & \frac{p^{II}}{q^{II}}, & \frac{p^{III}}{q^{III}}. \\ \mu^{oo}, & \mu^{o}, & \mu, & \mu^{I}, & \mu^{II}, & \mu^{III}, \end{array}$$

fortgesezten Reihe sey der Bruch $\frac{p^{III}}{q^{III}}$ von der Beschaffenheit, daß Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so daß, wenn $p^{III} = \pi m$ und $q^{III} = \pi n$ gesezt wird, $\frac{p^{III}}{q^{III}} = \frac{m}{n}$ sey, wo mithin $n < q^{III}$ ist. Dieser in kleineren Zahlen ausgedrückte Werth $\frac{m}{n}$ ist nun entweder einem vor $\frac{p^{III}}{q^{III}}$ hergehenden, also gleichfalls in kleineren Zahlen ausgedrückten Werthe $\frac{p}{q}$ vollkommen gleich, oder er fällt zwischen zwei andere dergleichen, deren nächster und zwar unmittelbar größerer als $\frac{m}{n}$ hiemit $\frac{p}{q}$ seyn mag; so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{s p^{o} + p^{oo} \mu^{oo}}{s q^{o} + q^{oo} \mu^{oo}}.$$

Bedeutet nun $\frac{p^{III}}{q^{III}}$ den lezten, oder äussersten Werth der Reihe $\frac{A^{o}}{B^{o}}$ &c. (welches anzunehmen erlaubt ist, indem wir von den folgenden abstrahiren,) und ist der für s gehörige vollständige Quotient $S = s + \frac{\mu^{o}}{t + \text{\&c.}}$, so verwandelt sich $\frac{p}{q}$ in $\frac{p^{III}}{q^{III}}$, wenn S statt s genommen wird.

Daher

Daher ist $\frac{p^{III}}{q^{III}} = \frac{S\,p^{o} + p^{oo}\,\mu^{oo}}{S\,q^{o} + q^{oo}\,\mu^{oo}}$. Folglich

$$\frac{p^{III}}{q^{III}} - \frac{p}{q} = \frac{Sp^{o} + p^{oo}\,\mu^{oo}}{Sq^{o} + q^{oo}\,\mu^{oo}} - \frac{sp^{o} + p^{oo}\,\mu^{oo}}{sq^{o} + q^{oo}\,\mu^{oo}}, \text{ oder}$$

$$= \frac{\mu^{oo}\,(p^{o}\,q^{oo} - q^{o}\,p^{oo})\,(S - s)}{q\,q^{III}}$$

Da nun seiner Natur nach $S > s$ ist, so kann der Zähler, mithin auch $\frac{p^{III}}{q^{III}} - \frac{p}{q}$ nie $= o$ seyn. Daher ist kein Glied der Reihe der convergirenden Brüche einem vorhergehenden gleich.

Ist aber zweitens, $\frac{p}{q}$ unmittelbar größer, als $\frac{m}{n}$, so ist, wenn von den Zeichen abstrahirt wird, nothwendig auch $\frac{p^{III}}{q^{III}} - \frac{m}{n}$ noch größer als $\frac{p^{III}}{q^{III}} - \frac{p}{q}$, also um so mehr größer als o, und folglich kann $\frac{p^{III}}{q^{III}}$ nie $= \frac{m}{n}$ seyn, wenn m und n kleinere Zahlen, als p^{III} und q^{III} bedeuten. Demnach bestehen die zwei Bedingungen, daß $\frac{p^{III}}{q^{III}}$ ein Glied der Reihe, $\frac{A^{o}}{B^{o}}$, $\frac{A^{I}}{B^{I}}$ .... &c. ist, und daß es sich durch Dividiren des Zählers und Nenners auf den in kleineren Zahlen ausgedrückten Bruch $\frac{m}{n}$ zurück bringen lasse, unmöglich mit einander; das heißt: alle Glieder der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Reihe sind solche Brüche, die bereits auf ihre kleinste Benennung gebracht sind.

4) Die

4) Der Unterschied von je zwei zunächst auf einander folgenden Brüchen $\frac{p}{q}$, $\frac{p^\circ}{q^\circ}$, die gegen $\frac{A}{B}$ convergiren, ist, wenn man von dem Zeichen des Ueberrests abstrahirt:

$$\frac{p}{q} - \frac{p^\circ}{q^\circ} = \frac{fp^\circ + p^{\circ\circ}\mu^{\circ\circ}}{fq^\circ + q^{\circ\circ}\mu^{\circ\circ}} - \frac{p^\circ}{q^\circ}$$

oder $= \frac{\mu^{\circ\circ}(p^{\circ\circ}q^\circ - q^{\circ\circ}p^\circ)}{q^\circ q}$, mithin nach Nr. 1.

$$= \frac{\beta\,\gamma\,\delta\,.\,.\,.\,.\,.\,\mu^{\circ\circ}}{q^\circ q}.$$

Dieser Unterschied wird desto kleiner, je kleiner die Zähler β, γ, δ, &c. sind, und je größer die Nenner q°, q &c. werden. Diese leztern wachsen aber nach dem Gesetze §. 19. und jene hängen von der Natur derjenigen Größe ab, die in einen continuirlichen Bruch verwandelt wird, und ihr Produkt ist am kleinsten, wenn sie sämmtlich entweder Brüche, oder der Einheit gleich sind, von welcher lezteren Gattung die anfangs ausführlich abgehandelten Brüche sind.

5) Wenn man noch einmal auf die gegen $\frac{A}{B}$ convergirende Reihe $\frac{A^\circ}{B^\circ}$, $\frac{A^I}{B^I}$, $\frac{A^{II}}{B^{II}}$ &c. zurückgehet, und je zwei zunächst auf einander folgende Glieder der Ordnung nach von einander abziehet; so hat man nach Nr. 4.

$$\frac{A^I}{B^I} - \frac{A^\circ}{B^\circ} = \frac{\beta}{B^\circ B^I}, \text{ also } \frac{A^I}{B^I} = \frac{A^\circ}{B^\circ} + \frac{\beta}{B^\circ B}$$

$$= a + \frac{\beta}{B^\circ B^I}.$$

Ferner

Ferner

$$\frac{A^{II}}{B^{II}} - \frac{A^{I}}{B^{I}} = -\frac{\beta\gamma}{B^{I}B^{II}}, \text{ also } \frac{A^{II}}{B^{II}} = \frac{A^{I}}{B^{I}} - \frac{\beta\gamma}{B^{I}B^{II}}$$

$$= a + \frac{\beta}{B^{o}B^{I}} - \frac{\beta\gamma}{B^{I}B^{II}}$$

Eben so

$$\frac{A^{III}}{B^{III}} - \frac{A^{II}}{B^{II}} = +\frac{\beta\gamma\delta}{B^{II}B^{III}}; \text{ also } \frac{A^{III}}{B^{III}} = a + \frac{\beta}{B^{o}B^{I}}$$

$$- \frac{\beta\gamma}{B^{I}B^{II}} + \frac{\beta\gamma\delta}{B^{II}B^{III}}$$

also auch

$$\frac{A^{x}}{B^{x}} = a + \frac{\beta}{B^{o}B^{I}} - \frac{\beta\gamma}{B^{I}B^{II}} + \frac{\beta\gamma\delta\ldots\ldots}{B^{II}\,B^{III}} \pm \frac{\beta\gamma\delta\ldots\ldots\mu}{B^{x-I}\,B^{x}}$$

wo x keinen Exponenten, sondern ein bloßes Zeichen bedeutet.

Wenn man also die Reihe immer weiter und weiter fortsezt, so wird sie entweder endlich abbrechen, und $\frac{A^{x}}{B^{x}}$ ist sodann der wahre Werth von $\frac{A}{B}$, oder sie wird ins unendliche fortgehen, und in diesem Fall ist $\frac{A^{x}}{B^{x}}$ der gröste Näherungswerth von $\frac{A}{B}$: daher in jedem Falle

$$\frac{A}{B} = a + \frac{\beta}{b} - \frac{\beta\gamma}{b(bc+\gamma)} + \frac{\beta\gamma\delta}{(bc+\gamma)((bc+\gamma)d+b\delta)}$$

$$- \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon}{((bc+\gamma)d+b\delta)(((bc+\gamma)d+b\delta)e+(bc+\gamma)\varepsilon)}$$

$$+ \text{\&c.}$$

seyn wird, wo wir anstatt B°, B^{I}, B^{II} &c. die §. 19. ausgedrückten Werthe dieser Größe genommen haben.

Auf

Auf diese Art kann jeder convergirende Bruch in eine Reihe verwandelt werden, welche am meisten convergiren wird, wenn die ganze Zahlen β, γ, δ &c. alle der Einheit gleich sind. Eben dieser Formel kann man sich aber auch umgekehrt bedienen, um Reihen mit abwechselnden bejahten und verneinten Gliedern in continuirliche Brüche zu verwandeln.

II. Abschnitt.

Von Erforschung der continuirlichen Brüche.

---

§. 21. Die continuirlichen Brüche finden statt entweder bei rationalen Brüchen, die man sämtlich in continuirliche verwandeln kann, oder bei irrationalen Größen, die man als solche Brüche ausdrückt, um dem wahren Werthe derselben immer näher zu kommen. Bei den ersteren hat man den Zweck, den bekannten Werth eines in großen Zahlen ausgedrückten Bruchs, dessen Zähler und Nenner unter sich Primzahlen (numeri inter se primi) sind, und die sich also nicht verkleinern lassen, in kleineren Zahlen so genau als möglich auszudrücken. Bei den andern weiß man den Werth der Irrationalgröße nicht: kommt ihr aber durch Hilfe der continuirlichen Brüche immer näher.

Für die Erforschung der continuirlichen Brüche, die eine gegebene irrationale Größe (deren es in dem Gebiete der Mathematik so viele und so mancherlei gibt,) aus-

ausdrücken sollen, läßt sich keine allgemeine Regel geben, weil diese Erforschung von der Natur der irrationalen Größen selbst abhängt, und also individuell ist. Nur diß ist zu beobachten, daß man trachten muß, wenn A eine solche irrationale Größe vorstellt, denjenigen Werth a von A in ganzen Zahlen zu finden, der A am nächsten kommt, und der daher von A um keine Einheit verschieden ist. Da nun also $A - a < 1$ ist, so muß nothwendig $\frac{1}{A-a} > 1$ seyn.

Sezt man jezt $A - a = \frac{1}{z}$, so ist $z = \frac{1}{A-a}$ eine Zahl die > 1 ist. Nun muß man ferner trachten, die in z steckende gröste ganze Zahl b zu bestimmen, also daß abermal $z - b < 1$, und $z - b = \frac{1}{z^{1}}$ wird, wo $z^{1} = \frac{1}{z-b}$ auch hier wieder > 1 seyn muß. Weiß man Mittel, auch von z^{1} wieder den nächsten Werth c in ganzen Zahlen zu bestimmen, und fährt auf diese Art fort, so kommt man A immer näher: denn da $A - a = \frac{1}{z}$, so ist $A = a + \frac{1}{z}$. Nun ist aber $z = b + \frac{1}{z^{1}}$, ferner $z^{1} = c + \frac{1}{z^{11}}$ u. s. w.

$$\text{mithin } A = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \&c.}}}$$

und man kommt demnach durch lauter rationale Größen, a, b, c, d &c. dem irrationalen Werthe A um so nä-

her, je mehr dergleichen Quotienten an einander gereihet werden.

§. 22. Der Weg, die in $\frac{1}{A-a}$ steckende ganze Zahl b zu erforschen, ist vorzüglich dieser, daß man die Irrationalität aus dem Nenner in den Zähler überträgt, welches immer geschehen kann; denn auf diese Art läßt sich die in z oder in $\frac{1}{A-a}$ enthaltene gröste mögliche ganze Zahl b sehr leicht bestimmen. Ein gleiches gilt auch von den übrigen Werthen von z^{I}, z^{II}, z^{III} &c.

Einige Beispiele werden die bisherigen Bemerkungen erläutern.

I. Beispiel.

Man soll den Werth von $\sqrt{85}$ durch einen continuirlichen Bruch ausdrücken.

Die nächste Quadratwurzel in ganzen Zahlen von 85 ist 9. Man setze also $A = \sqrt{85}$, und $a = 9$, so ist $z = \frac{1}{A-a} = \frac{1}{\sqrt{85}-9}$. Um nun diejenige ganze Zahl zu finden, welche dem Werth dieses uneigentlichen Bruchs am nächsten kommt, trage man, nach §. 22. die Irrationalität aus dem Nenner in den Zähler über. Diß geschiehet dadurch, daß man den Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{\sqrt{85}-9}$ mit $\sqrt{85} + m$ multiplicirt; wo m einstweilen noch unbestimmt sey. Diß gibt

$$z = \frac{\sqrt{85} + m}{85 + (m-9)\sqrt{85} - 9m.}$$

Soll nun die Irrationalität in dem Nenner verschwinden, so muß das unbestimmte $m = 9$ angenommen werden. Dadurch wird

$$z = \frac{\sqrt{85} + 9}{85 - 81} = \frac{\sqrt{85} + 9}{4}.$$

Nunmehr ist es leicht, die gröste in z steckende ganze Zahl zu erkennen. Denn die nächste Wurzel von 85 in ganzen Zahlen ist 9, mithin ist der Zähler unsers Bruchs etwas über 18, welche Zahl mit 4 getheilt, 4 zum Quotienten gibt. Es ist also $b = 4$. Man fahre nun also fort:

$\frac{\sqrt{85} + 9}{4} = 4 + \frac{1}{z^{I}}$, so ist $z^{I} = \frac{4}{\sqrt{85} - 7}$. Hier wird, wie vorhin, die Irrationalität aus dem Nenner in den Zähler übergetragen, wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{85} + 7$ multiplicirt, und es ist $z^{I} = \frac{4(\sqrt{85} + 7)}{85 - 49} = \frac{\sqrt{85} + 7}{9}$. Da nun 9 die gröste in $\sqrt{85}$ enthaltene ganze Zahl ist, so ist die gröste in $\frac{\sqrt{85} + 7}{9}$ steckende Zahl $= 1 = c$, und also

$\frac{\sqrt{85} + 7}{9} = 1 + \frac{1}{z^{II}}$; demnach

$$z^{II} = \frac{9}{\sqrt{85} - 2} = \frac{9(\sqrt{85} + 2)}{85 - 4} = \frac{\sqrt{85} + 2}{9} = 1 + \frac{1}{z^{III}}.$$

also $z^{III} = \frac{9}{\sqrt{85} - 7} = \frac{9(\sqrt{85} + 7)}{85 - 49} = \frac{\sqrt{85} + 7}{4} = 4 + \frac{1}{z^{IV}}$

daher $z^{IV} = \frac{4}{\sqrt{85} - 9} = \frac{4(\sqrt{85} + 9)}{85 - 81} = \sqrt{85} + 9 = 18 + \frac{1}{z^{V}}$.

Folglich $z^{V} = \frac{1}{\sqrt{85} - 9} = z$, daher $z^{V} = z = 4 + \frac{1}{z^{I}}$

 und

und die obigen Werthe von z^{I}, z^{II}, z^{III}, kommen der Reihe nach wieder vor. Demnach ist:

$$\sqrt{85} = 9 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{18 + \text{\&c.}}}}}}}}}}}$$

Aus diesen Quotienten 9, 4, 1, 1, 4, 18, 4, 1, 1, 4, 18, &c. entsteht daher, nach §. 8. 9. 10. folgende Reihe von Brüchen, die gegen $\sqrt{85}$ convergiren, und abwechslungsweise kleiner und größer als diese Irrationalzahl sind:

$$\frac{9}{1},\ \frac{37}{4},\ \frac{46}{5},\ \frac{83}{9},\ \frac{378}{41},\ \frac{6887}{747},\ \frac{27926}{3029},$$

$$\frac{34813}{3776},\ \frac{62739}{6805},\ \frac{285769}{30996},\ \frac{5206581}{564733}.$$

Durch wirkliche Ausziehung der Quadratwurzel, aus 85 aber findet sich $\sqrt{85} = 9{,}219544\ldots$

Nun ist z. B. der fünfte Bruch $\frac{378}{41} = 9{,}21951\ldots$ und daher nur in den hundert tausend Theilen von dem wahren Werthe unterschieden. Die andern Brüche in größern Zahlen sind nach Verhältniß noch näher an $\sqrt{85}$.

II. Bei=

II. Beispiel.

§. 24. Die Quadratwurzel aus 31 durch einen continuirlichen Bruch auszudrücken.

Die nächste Wurzel in ganzen Zahlen aus 31 ist 5. Man setze also $\sqrt{31} = 5 + \frac{1}{z}$, so ist $z = \frac{1}{\sqrt{31}-5}$, welcher Werth nothwendig größer als die Einheit seyn muß, weil, wenn z entweder gleich der Einheit, oder kleiner, als dieselbe wäre, $5 + \frac{1}{z}$ um eine oder mehrere Einheiten größer wäre, und demnach die nächst kleinere Wurzel in ganzen Zahlen von 31 größer als 5 seyn müßte, welches dem nicht also ist. Es ist demnach $\frac{1}{\sqrt{31}-5}$ größer als die Einheit. Um nun die in diesem Werthe von z steckende ganze Zahl zu finden, muß man diesem uneigentlichen Bruche eine andre Form geben, eine solche nehmlich, daß das Wurzelzeichen aus dem Nenner in den Zähler übergetragen wird. Man multiplicire daher Zähler und Nenner durch den unbestimmten Werth $\sqrt{31} + m$, so ist

$$z = \frac{\sqrt{31} + m}{31 + (m-5)\sqrt{31} - 5m.}$$

Soll nun das Wurzelzeichen im Nenner verschwinden, so muß das unbestimmte $m = 5$ angenommen werden. Diß gibt $z = \frac{\sqrt{31}+5}{6}$. Da aber die nächst kleinere Quadratwurzel in ganzen Zahlen $= 5$ ist, so ist die in z steckende gröste mögliche ganze Zahl $= 1$, und also $\frac{\sqrt{31} + 5}{6} = 1 + \frac{1}{z^1}$, und hieraus folgt

$z^1 =$

$z^{I} = \frac{6}{\sqrt{31}-1}$, welcher Werth abermal größer als die Einheit seyn muß. Man trage, wie so eben gezeigt worden, das Wurzelzeichen aus dem Nenner in den Zähler über, so ergibt sich

$$z^{I} = 6\frac{(\sqrt{31}+1)}{31-1} = \frac{\sqrt{31}+1}{5}.$$

Es ist aber die gröste in $\frac{\sqrt{31}+1}{5}$ steckende ganze Zahl = 1, und demnach

$$z^{I} = \frac{\sqrt{31}+1}{5} = 1 + \frac{1}{z^{II}};\quad \text{folglich ist}$$

$$z^{II} = \frac{5}{\sqrt{31}-4} = \frac{5(\sqrt{31}+4)}{31-16} = \frac{\sqrt{31}+4}{3} = 3 + \frac{1}{z^{III}}$$

hieraus folgt nun wieder

$$z^{III} = \frac{3}{\sqrt{31}-5} = \frac{\sqrt{31}+5}{2} = 5 + \frac{1}{z^{IV}}$$

$$\text{also } z^{IV} = \frac{2}{\sqrt{31}-5} = \frac{\sqrt{31}+5}{3} = 3 + \frac{1}{z^{V}}.$$

$$\text{mithin } z^{V} = \frac{3}{\sqrt{31}-4} = \frac{\sqrt{31}+4}{5} = 1 + \frac{1}{z^{VI}}$$

$$\text{daher } z^{VI} = \frac{5}{\sqrt{31}-1} = \frac{\sqrt{31}+1}{6} = 1 + \frac{1}{z^{VII}}$$

$$\text{folglich } z^{VII} = \frac{6}{\sqrt{31}-5} = \frac{\sqrt{31}+5}{1} = 10 + \frac{1}{z^{VIII}}$$

$$\text{also } z^{VIII} = \frac{1}{\sqrt{31}-5} = \frac{\sqrt{31}+5}{31-25} = \frac{\sqrt{31}+5}{6}.$$

Da nun dieser Werth von z^{III} dem ersteren, nehmlich dem von z völlig gleich ist, so folgt auch daraus, daß

z^{IX}

$z^{IX} = z^{I}$, $z^{X} = z^{II}$, u. s. w. seyn werde, und daß man mithin die bereits gefundene Reihe von ganzen Werthen von z, z^{I}, z^{II} . . . bei fortgesezter Rechnung ins Unendliche wiederholt finden würde.

Es ist demnach

$$\sqrt{31} = 5 + \cfrac{1}{z} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z^{I}}} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z^{II}}}}$$

$$= 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{z^{III}}}}}$$

u. s. w. oder

oder

$$\sqrt{31} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \&c.}}}}}}}}}}}}$$

woraus

woraus sich folgende, gegen $\sqrt{31}$ convergirende Näherungswerthe ergeben:

$$\frac{5}{1},\ \frac{6}{1},\ \frac{11}{2},\ \frac{39}{7},\ \frac{206}{37},\ \frac{657}{118},\ \frac{863}{155},\ \frac{1520}{273},$$

$$\frac{16063}{2885},\ \frac{17583}{3158},\ \frac{33646}{6043},\ \frac{118521}{21287},\ \frac{626251}{112478},\ \text{u. s. w.}$$

§. 25. Nachdem solchergestalt einige von den Quotienten, durch welche der die Irrationalzahl ausdrückende continuirliche Bruch bestimmt wird, gefunden worden sind; so ist noch übrig, das allgemeine Gesez ihres Fortgangs zu erforschen, damit diese Quotienten bequemer gefunden, und die folgenden aus den vorhergehenden bereits bekannten hergeleitet werden können. Diß aber kann vorzüglich dadurch geschehen, daß man das Gesez des Fortgangs der vollständigen Quotienten allgemein zu bestimmen sucht, weil aus diesen die in ihnen steckenden grösten ganzen Zahlen oder Quotienten sich sodann von selbst ergeben. Die Art und Weise aber, diß zu bewerkstelligen, hängt auch hier von der jeder Aufgabe eigenthümlichen Beschaffenheit ab; daher sich hierüber ebenfalls nichts allgemeines festsetzen läßt. In dem nun abzuhandelnden dritten Abschnitte aber werden sich mehrere Beispiele finden, die einiges Licht über diese Materie verbreiten können.

III. Abschnitt.

Anwendung der Theorie der continuirlichen Brüche auf merkwürdige Aufgaben, vorzüglich der Arithmetic und Algebra.

A.) Verwandlung der gewöhnlichen Brüche in continuirliche.

§. 26. Es kann jeder gegebene, in rationalen Zahlen ausgedrückte Bruch, in einen continuirlichen verwandelt werden, und der Zweck davon ist, einen solchen, in grossen Zahlen vorgestellten Bruch, dessen Zähler und Nenner sich nicht aufheben lassen, in kleineren Zahlen so genau als möglich darzustellen, welches zu besondern Absichten sehr nüzlich seyn kann.

Es sey also $\frac{A}{B}$ ein in rationalen Zahlen ausgedrückter Bruch, der in einen continuirlichen verwandelt werden soll: so dividire man Zähler und Nenner mit dem kleineren dieser beiden, z. B. mit B, und setze $\frac{A}{B} = a + \frac{\alpha}{B}$, wo $\alpha < B$ seyn wird. Man dividire ferner in $\frac{\alpha}{B}$ Zähler und Nenner mit α, und setze

$\frac{\alpha}{B} = \frac{\alpha:\alpha}{B:\alpha} = \frac{1}{\frac{B}{\alpha}} = \frac{1}{b + \frac{\beta}{\alpha}}$, wo β, als Ueberrest der

Division von B durch α, nothwendig abermal kleiner, als α seyn wird. Man dividire abermal sowohl den Zähler als Nenner von $\frac{\beta}{\alpha}$ mit β, und setze

$$\frac{\beta : \beta}{\alpha : \beta} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{c + \frac{\gamma}{\beta}}$$ wo γ wieder kleiner, als β ist,

und auf diese Art fahre man fort, den jedesmaligen Rest in den vorhergehenden Divisor zu dividiren (wie wenn man, nach den bekannten Vorschriften der Arithmetic, den grösten gemeinschaftlichen Theiler von $\frac{A}{B}$ suchen wollte.) Vermittelst dieser sehr einfachen Operation erhält man nun:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{\alpha}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{\beta}{\alpha}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{\gamma}{\beta}}}$$

$$= a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \&c.}}}}$$

Daß nun aber für rationale A und B dieser continuirliche Bruch endlich irgendwo abbrechen müße, erhellet daraus, weil die Ueberreste oder Dividendi α, β, γ, eine abnehmende Reihe ganzer Zahlen bilden, und man also nothwendig auf einen kommen muß, der o ist.

Aus

Aus den gefundenen Quotienten a, b, c, d, &c. läßt sich sodann nach §. 8. 9. 10. die Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche berechnen.

I. Beispiel.

§. 27. Man soll den Bruch $\frac{75983}{13984}$ durch kleinere Brüche ausdrücken, die sich demselben so viel als möglich nähern.

Nach dem, was im vorhergehenden §. gezeigt worden ist, stelle man folgende Berechnung an, als ob man den grösten gemeinschaftlichen Theiler von 75983 und 13984 suchen wollte:

```
13984|75983| 5
     |69920|
      6063|13984| 2
          |12126|
           1858|6063| 3
               |5574|
                 489|1858| 3
                    |1467|
                      391|489| 1
                         |391|
                           98|391| 3
                             |294|
                               97|98| 1
                                 |97|
                                   1|97| 97.
                                    |97|
                                      0
```

Nun

Nun mache man nach §. 8. aus den gefundenen Quotienten: 5, 2, 3, &c. die Reihe:

$$\overset{5}{\frac{1}{0}},\ \overset{2}{\frac{5}{1}},\ \overset{3}{\frac{11}{2}},\ \overset{3}{\frac{38}{7}},\ \overset{1}{\frac{125}{23}},\ \overset{3}{\frac{163}{30}},\ \overset{1}{\frac{614}{113}},\ \overset{97}{\frac{777}{143}}.$$

oder nach §. 9. Das Schema:

		1	0
5	—	0	1
2	—	1	5
3	—	2	11
3	—	7	38
1	—	23	125
3	—	30	163
1	—	113	614
97	—	143	777
		13984	75983

so sind die Brüche

$$\frac{5}{1},\ \frac{11}{2},\ \frac{38}{7},\ \frac{125}{23},\ \frac{163}{30},\ \frac{614}{113},\ \frac{777}{143},$$

abwechslungsweise kleiner und größer, als der gegebene Bruch. Jeder derselben nähert sich aber (nach §. 12.) dem Werthe $\frac{A}{B}$ mehr als jeder andere Bruch mit kleinerem Nenner, und auch mehr als alle vorhergehende (§. 11. Nr. 6.)

Ferner ist (nach §. 11. Nro 7.) der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und z. B. von $\frac{11}{2}$ kleiner als $\frac{1}{2.7}$, der von $\frac{A}{B}$ und von

$\frac{38}{7}$ kleiner, als $\frac{1}{7 \cdot 23}$, der von $\frac{A}{B}$ und $\frac{125}{23}$ kleiner als $\frac{1}{23 \cdot 36}$ u. s. w. so daß der Unterschied von $\frac{A}{B}$ und von $\frac{777}{143}$ kleiner als $\frac{1}{143 \cdot 13984}$ ist.

Ausser diesen gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüchen lassen sich aber auch nach §. 15. andere mit arithmetisch wachsenden Zählern und Nennern finden, die wir Nebenbrüche oder eingeschaltete Brüche nannten.

Es ist nehmlich daselbst gezeigt worden, daß, wenn in der Reihe der gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche:

$$\ldots\ldots \overset{\ldots\ldots\mu}{} \quad \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{p^{I}}{q^{I}} \ldots\ldots$$

$\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ und $\frac{p^{I}}{q^{I}}$, (wovon der leztere $\frac{p^{I}}{q^{I}} = \frac{\mu p + p^{\circ}}{\mu q + q^{\circ}}$ ist,) zwei solche Brüche sind, die entweder zugleich kleiner, oder zugleich größer, als $\frac{A}{B}$ sind, sodann zwischen p° und p^{I} so viele Nebenbrüche von der Form

$$\frac{1p + p^{\circ}}{1q + q^{\circ}}, \quad \frac{2p + p^{\circ}}{2q + q^{\circ}}, \quad \frac{3p + p^{\circ}}{3q + q^{\circ}} \ldots$$

eingeschaltet werden können, als $\mu - 1$ Einheiten enthält, wo μ der den Bruch $\frac{p^{I}}{q^{I}} = \frac{\mu p + p^{\circ}}{\mu q + q^{\circ}}$ bestimmende Quotient ist. Wendet man nun diß auf unser Beispiel an, und betrachtet zuerst die Reihe derjenigen

gegen

gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden Brüche, die größer, als diese Gränze sind, nehmlich

$$\frac{0}{1},\ \frac{11}{2} = \frac{2.\,5 + 1}{2.\,1 + 0};\ \frac{125}{23} = \frac{3.\,38 + 11}{3.\,7 + 2};$$

$$\frac{614}{113} = \frac{3.\,163 + 125}{3.\,30 + 23}$$

und $\frac{75983}{13984} = \frac{97.\,777 + 614}{97.\,143 + 113}$, so findet sich zwischen $\frac{0}{1}$ und $\frac{11}{2}$ wegen $\mu = 2$ nur ein Bruch nemlich $\frac{1.\,5 + 1}{1.\,1 + 0} = \frac{6}{1}$.

zwischen $\frac{125}{23}$ und $\frac{11}{2}$ wegen $\mu = 3$ deren zwei:

$$\frac{1.\,38 + 11}{1.\,7 + 2} = \frac{49}{9},\ \text{und}\ \frac{2.\,38 + 11}{2.\,7 + 2} = \frac{87}{16}$$

zwischen $\frac{614}{113}$ und $\frac{125}{23}$ wegen $\mu = 3$ ebenfalls zwei:

$$\frac{1.\,163 + 125}{1.\,30 + 23} = \frac{288}{53},\ \text{und}\ \frac{2.\,163 + 125}{2.\,30 + 23} = \frac{451}{83}.$$

zwischen $\frac{75983}{13984}$ und $\frac{614}{13}$ wegen $\mu = 97$ deren sechs und neunzig, als:

$$\frac{1.\,777 + 614}{1.\,143 + 113} = \frac{1391}{256},\ \frac{2.\,777 + 614}{2.\,143 + 113} = \frac{2168}{399},$$

$$\frac{3.\,777 + 614}{3.\,143 + 113} = \frac{2945}{542}$$

$$\ldots\ldots\ \frac{96.\,777 + 614}{96.\,143 + 113} = \frac{75206}{13841}.$$

Eben

Eben so, wenn man die Reihe der kleineren Brüche, als $\frac{A}{B}$ betrachtet, und sie, nach dem Gesez ihrer Entstehung, also vorstellt:

$$\frac{5}{1},\ \frac{38}{7} = \frac{3.11+5}{3.2+1};\ \frac{163}{30} = \frac{1.125+38}{1.23+7};$$

$$\frac{777}{143} = \frac{1.614+163}{1.113+30}$$

so sind

zwischen $\frac{38}{7}$ und $\frac{5}{1}$ wegen $\mu = 3$ diese zwei Brüche:

$$\frac{1.11+5}{1.2+1} = \frac{16}{3} \text{ und } \frac{2.11+5}{2.2+1} = \frac{27}{5}$$

zwischen $\frac{163}{30}$ und $\frac{38}{7}$ wegen $\mu = 1$ gar keiner.

zwischen $\frac{777}{143}$ und $\frac{163}{30}$ wegen $\mu = 1$ ebenfalls keiner.

Sammelt man das bisher gefundene in ein einziges Resultat, so haben wir:

1) Näherungswerthe von $\frac{75983}{13984}$ die größer, als dieser Bruch sind:

$$\frac{6}{1},\ \frac{11}{2},\ \frac{49}{9},\ \frac{87}{16},\ \frac{125}{23};\ \frac{288}{53},\ \frac{451}{83},\ \frac{614}{113},\ \frac{1391}{256},$$

$$\frac{2168}{399},\ \frac{2945}{542},\ \frac{3722}{685} \ldots\ldots \frac{75206}{13841},\ \frac{75983}{13984}.$$

2) Näherungswerthe von $\frac{75983}{13984}$ die kleiner, als

dieser

dieser Bruch sind.

$\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{27}{5}, \frac{38}{7}, \frac{163}{30}, \frac{777}{143}$.

* Da die Lehre von den eingeschalteten Brüchen in diesem Beispiele ausführlich erläutert worden ist, so werde ich sie, um nicht überflüßig weitläufig zu seyn, in den folgenden Beispielen nicht weiter vorbringen, sondern es der eigenen Uebung des Lesers überlassen, für jedes die eingeschalteten Brüche selbst zu berechnen.

II. Beispiel.

§. 28. Das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange durch continuirliche Brüche auszudrücken.

Dieses Verhältniß ist, wie bekannt, wie 1:3, 14159265358979 3 .... oder in ganzen Zahlen wie 100000000000000 : 314159265358979 3 ....

Wenn man nun diesen Bruch wie den des vorhergehenden Beispiels behandelt, so erhält man die Quotienten 0, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, &c. wobei zu bemerken ist, daß wegen den nach der Ziffer 3 hinweggelassenen Decimalbrüchen in dem Werthe der Peripherie nur diejenigen Anfangs-Quotienten 0, 3, 7, &c. genommen worden sind, welche sich auch ergeben hätten, wenn die lezte Ziffer anstatt 3 die Zahl 4 gewesen wäre. Aus diesen Anfangs-Quotienten erhält man nun nach §. 8. 9. 10. folgende Näherungsbrüche, welche das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange in den kleineren Zahlen so genau als möglich ausdrücken:

1 : 3

1	3
7	22
106	333
113	355
33102	103993
33215	104348
66317	208341
99532	312689
265381	833719
&c.	&c.

III. Beispiel.

§. 29. Die Periode innerhalb welcher der Mond den Thierkreis durchläuft, durch continuirliche Brüche auszudrücken.

Diese Periode, nach Lamberts Beiträgen 2c. II. Theil pag. 74. ist 27 Tage, 7 St. 43 Minut. 5 Sec. 2 Terz. $58\frac{1}{2}$ Quart. oder 27, 32158601 . . . . . Tage. In so viel Tagen macht demnach der Mond einmal seine Revolution, also in 2732158601 Tagen 100000000 mal. Man suche nun, nach §. 26. 27. die aus dem Bruche $\frac{2732158601}{100000000}$ entspringenden Quotienten, und damit die lezte Ziffer 1 des Zählers dieselbe nicht ungewiß mache, so verwandle man diese in 2, suche eben so die Quotienten für $\frac{2732158602}{100000000}$, behalte nur diejenigen derselben bei, die beiden Brüchen gemeinschaftlich sind, so erhält man folgende:

27, 3, 9, 7, 1, 35, aus welchen diese gegen $\frac{2732158601}{100000000}$ convergirende Brüche entspringen:

$$\frac{27}{1};\ \frac{82}{3},\ \frac{765}{28},\ \frac{5437}{199},\ \frac{6202}{227}.$$

Es macht daher der Mond seine Bahn durch den Thierkreis

nach dem	ersten	in	27	Tagen	1	mal.
	zweiten	—	82	—	3	—
	dritten	—	765	—	28	—
	vierten	—	5437	—	199	—
	fünften	—	6202	—	227	—

Von diesen ist der dritte Bruch $\frac{765}{28}$ schon sogenau, daß der Quotient 27 Tage 7 St. 42 Min. $51\frac{1}{2}$ Sec. nur etwas über $13\frac{1}{2}$ Sec. zu klein ist. Diß macht in 5 Revolutionen etwas weniges über 1 Minute. Stellt man also den Mondenlauf durch ein Räderwerk vor, so darf man, wie Lambert bemerkt, wenn man eben diesen Bruch hiezu annimmt, nur alle 5 Umlaufszeiten die Uhr um 1 Minute vorrücken.

Daß es aber unmöglich fallen würde, den Bruch $\frac{2732158601}{100000000}$ durch Räderwerk vorzustellen, fällt jedem von selbst in die Augen, da hingegen der ihm fast gleiche $\frac{765}{28}$ eine desto größere Leichtigkeit hiezu darbietet, da derselbe $= \frac{5 \cdot 153}{4 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}{4 \cdot 7}$ ist, und

also

also Räder mit einer sehr kleinen Anzahl von Zähnen gebraucht werden können.

Aehnliche Berechnungen lassen sich auch bei der Erde und den übrigen Planeten anstellen, zu welchem Ende ich für diejenigen, die sich noch weiter üben wollen, folgende Tabelle mit der Bemerkung beifüge, daß wenn sich unter den gegen $\frac{A}{B}$ convergirenden continuirlichen Brüchen zu irgend einem Zwecke kein tauglicher findet, man sodann die eingeschalteten, oder Nebenbrüche vornehmen müsse.

Umlaufszeit

der Erde:	1 J.	0 T.	5 St.	48 M.	45,5 S.
des Mercur:	0 —	87 —	23 —	14 —	25,9 —
der Venus:	0 —	224 —	16 —	41 —	32,4 —
des Mars:	1 —	321 —	22 —	18 —	27,3 —
des Jupit.	11 —	315 —	8 —	58 —	27,3 —
des Saturn:	29 —	164 —	7 —	21 —	50,0 —
des Uranus:	= —	30589,36	= —	= —	= —

IV. Beispiel.

§. 30. Das Verhältniß der Seite eines Quadrats zu seiner Diagonallinie in ganzen Zahlen so genau als möglich auszudrücken.

Dieses Verhältniß ist $1 : \sqrt{2}$, oder $1 : 1,41421355530 \ldots$ oder $100000000000 : 141421355530 \ldots$ Aus diesem Bruche erhält man folgende gegen denselben convergirende Brüche:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{12}{17},\ \frac{29}{41},\ \frac{70}{99},\ \frac{169}{239},\ \frac{408}{577},\ \frac{985}{1393},$$

wovon der lezte bis zur siebenten Decimalstelle mit $1 : \sqrt{2}$ übereinstimmt. Es verhält sich also ziemlich genau die Seite eines Quadrats zu seiner Diagonallinie wie 985 zu 1393.

V. Beispiel.

§. 31. Das Verhältniß der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks zu seiner Seite in ganzen Zahlen auszudrücken?

Diß Verhältniß ist wie $\sqrt{3} : 2$ oder wie 1,732050807 : 2, oder in ganzen Zahlen wie 173205087 : 2000000000. Verwandelt man nun die lezte Ziffer 7 des Vorderglieds in 8, und sucht die den Brüchen $\frac{1732050808}{2000000000}$ und $\frac{1732050807}{2000000000}$ gemeinschaftlichen Quotienten 1, 6, 2, 6, 2, 6, 1. so erhält man vermittelst derselben folgende gegen $\sqrt{3} : 2$ convergirende Brüche:

$$\frac{1}{1},\ \frac{6}{7},\ \frac{13}{15},\ \frac{84}{97},\ \frac{181}{209},\ \frac{1170}{1351},\ \frac{2521}{2921},\ \frac{3691}{4272}.$$

so daß ziemlich genau die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks zu seiner Seite sich verhält wie 3691 zu 4272.

§. 32. Zur ferneren Uebung mögen noch folgende Aufgaben dienen.

1) Das Verhältniß der Seite des in einen Kreis beschriebenen regulären Fünfecks zum Halbmesser dieses Kreises in ganzen Zahlen durch continuirliche Brüche auszudrücken.

2) Das

2) Das Verhältniß der Seite des regulären Fünfecks zu seiner Diagonallinie durch continuirliche Brüche auszudrücken.

3) Eben so das Verhältniß der Seite des regulären Siebenecks zum Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises.

4) Bekanntlich ist der Innhalt einer Ellipse, deren Axen a und b sind, $= \frac{\pi a b}{4}$, wo $\pi = 3,14159265358979\ldots$ mithin $\frac{\pi}{4} = 0,7853981633974\,4$ ist. Man soll anstatt dieses mit ab multiplicirten Bruchs andere in kleinern Zahlen angeben, mit denen das Produkt der Axen multiplicirt werden kann, um den Innhalt der Ellipse, zu verschiedenen Absichten, in kleineren Zahlen bequemer vorzustellen?

5) Man sucht das Verhältniß der Seite eines Quadrats und des Durchmessers eines Cirkels, die beide gleichen Innhalt haben, durch Hilfe der continuirlichen Brüche in kleinern Zahlen so genau als möglich vorzustellen.

6) Eben so das Verhältniß der Seite eines Würfels und des Durchmessers einer Kugel, die gleichen Innhalt haben.

B.) Aus-

B.) Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln, vermittelst der continuirlichen Brüche.

§. 33. Wir haben bereits oben §. 23. 24. an einigen Beispielen gezeigt, auf welche Art die Quadratwurzeln aus den Nichtquadratzahlen ausgezogen werden können. Da aber der dort beabsichtigte Zwek nicht dahin gieng, allgemeine Regeln zur desto leichtern Findung dieser Wurzeln zu geben: so wollen wir hier in dieser Rücksicht eben diese Materie noch einmal vornehmen, und sodann ähnliche Betrachtungen für die Ausziehung der Cubicwurzeln anstellen.

Es sey demnach a eine solche ganze Zahl die kein vollständiges Quadrat ist, und ihre nächst kleinere Quadratwurzel in ganzen Zahlen heiße α, so ist $\sqrt{a} = \alpha + \frac{1}{x}$, wo $x > 1$ seyn muß, weil, wenn diese Größe entweder $= 1$ oder > 1 wäre, α sonst wieder die Voraussetzung, nicht die nächstkleinste Wurzel von a in ganzen Zahlen seyn würde. Es ist nehmlich x der erste vollständige Quotient von dem Ausdruck für $\sqrt{a}$. Diß voraus gesetzt, so folgt aus $\sqrt{a} = \alpha + \frac{1}{x}$, der Werth $x = \frac{1}{\sqrt{a} - \alpha}$, oder wenn man nach §. 23. Zähler und Nenner mit $\sqrt{a} + \alpha$ multiplicirt, um das Wurzelzeichen in den Zähler überzutragen, $x = \frac{\sqrt{a} + \alpha}{a - \alpha^2}$.

Man setze $a - \alpha^2 = b$, so ist also $x = \frac{\sqrt{a} + \alpha}{b}$.

Da

Da aber $\sqrt{a}$ in ganzen Zahlen bekannt ist; so kann man auch die in dem vollständigen Quotienten $x = \frac{\sqrt{a} + \alpha}{b}$ steckende gröste mögliche Zahl β als bekannt ansehen, und daher setzen $\frac{\sqrt{a} + \alpha}{b} = \beta + \frac{1}{x^{I}}$, wo x^{I} ein neuer vollständiger Quotient ist, und hieraus folgt $x^{I} = \frac{b}{\alpha - b\beta + \sqrt{a}}$, oder wenn $\alpha - b\beta = -c$ gesetzt wird, $x^{I} = \frac{b}{-c + \sqrt{a}}$.

Man trage nun abermal das Irrationalzeichen aus dem Nenner dadurch in den Zähler über, daß man sowohl jenen, als diesen mit $+c + \sqrt{a}$ multiplicirt

Diß gibt

$$x^{I} = \frac{b(\sqrt{a} + c)}{a - c^2} = \frac{b(\sqrt{a} + c)}{a - (b\beta - \alpha)^2} = \frac{b(\sqrt{a} + c)}{a - \alpha^2 + 2\alpha\beta b - b^2\beta^2}$$

oder wegen $a - \alpha^2 = b$,

$x^{I} = \frac{\sqrt{a} + c}{1 + 2\alpha\beta - b\beta^2}$, oder endlich, wenn $1 + 2\alpha\beta - b\beta^2 = d$ gesezt wird, $x^{I} = \frac{\sqrt{a} + c}{d}$

Mit diesem vollständigen Quotienten lassen sich nun ähnliche Berechnungen, wie mit den vorhergehenden anstellen. Um aber auf etwas allgemeines zu kommen, bemerken wir, daß wenn man die bisher gefundenen Ausdrücke der vollständigen Quotienten, und die Art, wie sie gefunden wurden, genau untersucht, jeder derselben von der Form $\frac{m + \sqrt{a}}{n}$ war, und werden

mußte,

mußte, indem das Wurzelzeichen von dem Nenner in den Zähler übergetragen wurde. Man ist daher berechtiget, diß als die allgemeine Form aller vollständigen Quotienten anzunehmen, und sodann zu untersuchen, ob der Erfolg diese Annahme rechtfertige.

Es sei also der vollständige Quotient $x^{(n)} = \frac{M + \sqrt{a}}{N}$, und die gröste in ihm steckende ganze Zahl sey $= \mu^{(n)}$, so ist $\frac{M + \sqrt{a}}{N} = \mu^{(n)} + \frac{1}{x^{(n+1)}}$,

wo (n) und (n + 1), wie sichs von selbst versteht, keine Exponenten, sondern bloße Zeichen sind.

Aus dieser Gleichung folgt $x^{(n+1)} = \frac{N}{M - N\mu^{(n)} + \sqrt{a}}$.

Da nun auch dieser vollständige Quotient von der Form $\frac{m + \sqrt{a}}{n}$ seyn soll, so setze man denselben, nehmlich

$$\frac{N}{M - N\mu^{(n)} + \sqrt{a}} = \frac{M^{I} + \sqrt{a}}{N^{I}};$$

aus dieser Gleichung folgt:

$$NN^{I} = (M + M^{I} - N\mu^{(n)})\sqrt{a} + a + MM^{I} - NM^{I}\mu^{(n)},$$

und wenn man hier die rationalen Glieder den rationalen, und die irrationale den irrationalen gleich sezt, so erhält man folgende beide Gleichungen:

$M + M^{I} - \mu^{(n)}N = 0$, und $a + MM^{I} - NM^{I}\mu^{(n)} = NN^{I}$.

Aus der ersten folgt $M^{I} = N\mu^{(n)} - M$, und aus der

zweiten

zweiten $N^I = \frac{a + MM^I - NM^I \mu^{(n)}}{N} = \frac{a - (N\mu^{(n)} - M)M^I}{N}$

$= \frac{a - M^I M^I}{N}$

Wenn demnach in dem $\sqrt{a}$ vorstellenden continuirlichen Bruche irgend ein vollständiger Quotient $x^{(n)} = \frac{M + \sqrt{a}}{N}$, und somit auch die in ihm steckende gröste mögliche ganze Zahl $\mu^{(n)}$ bekannt ist, so wird durch diese Größen der zunächstfolgende vollständige Quotient $x^{(n+1)} = \frac{M^I + \sqrt{a}}{N^I}$ dergestalt bestimmt, daß

$$M^I = N\mu^{(n)} - M, \text{ und}$$

$$N^I = \frac{a - M^I M^I}{N}$$

ist. Heißt daher die in $\frac{M^I + \sqrt{a}}{N}$ steckende gröste mögliche ganze Zahl $\mu^{(n+1)}$, so hat man für den nächstfolgenden vollständigen Quotienten $x^{(n+2)} = \frac{M^{II} + \sqrt{a}}{N^{II}}$ diese Bestimmungen:

$$M^{II} = N^I \mu^{(n+1)} - M^I, \text{ und}$$

$$N^{II} = \frac{a - M^{II} M^{II}}{N^I}$$

Heißt nun ferner die in $\frac{M^{II} + \sqrt{a}}{N^{II}}$ steckende gröste

ganze

ganze Zahl $\mu^{(n+2)}$, so folgt eben so für

$$x^{(n+3)} = \frac{M^{III} + \sqrt{a}}{N^{III}}, \text{ daß}$$

$$M^{III} = N^{II}\,\mu^{(n+2)} - M^{II}, \text{ und}$$

$$N^{III} = \frac{a - M^{III}\,M^{III}}{N^{II}} \text{ sey, u. s. w.}$$

Um also die ganze Reihe der vollständigen Quotienten (und demnach auch der in ihnen steckenden Quotienten oder größten möglichen ganzen Zahlen) nach diesem sehr einfachen Gesetze zu entwickeln, braucht man nur den ersten zu wissen. Dieser ist aber ganz natürlich $\frac{0 + \sqrt{a}}{1}$. Setzt man also $M = 0$, $N = 1$, und $\mu^{(n)} = \alpha$ so erhält man hieraus den zweiten, und aus diesem den dritten, u. s. w.

Diese Werthe können aber, wie folgende Tabelle zeigt, nun ganz mechanisch also aus einander hergeleitet werden:

Tabelle

Tabelle zur Berechnung der Quadratwurzel aus a durch continuirliche Brüche.

Werthe von M, M^I, M^{II}, M^{III} &c. nach der Formel $M^I = \mu N - M$.	Werthe von N, N^I, N^{II}, N^{III} &c. nach der Formel $N^I = \frac{a - MM}{N}$.	Vollständige Coefficienten von der Form $\frac{M + \sqrt{a}}{N}$.	Quotienten, oder größte in $\frac{M + \sqrt{a}}{N}$ steckende ganze Zahlen μ, μ^I, μ^{II}, &c.
$M = 0.$	$N = 1.$	$\frac{0 + \sqrt{a}.}{1}$	$\alpha = \mu.$
$M^I = \mu N - M = \mu$	$N^I = \frac{a - M^I M^I}{N} = a - \mu^2$	$\frac{\mu + \sqrt{a}}{a - \mu^2}$	$\mu^I.$
$M^{II} = \mu^I N^I - M^I$	$N^{II} = \frac{a - M^{II} M^{II}}{N^I}$	$\frac{M^{II} + \sqrt{a}}{N^{II}}$	$\mu^{II}.$
$M^{III} = \mu^{II} N^{II} - M^{II}$	$N^{III} = \frac{a - M^{III} M^{III}}{N^{II}}$	$\frac{M^{III} + \sqrt{a}}{N^{III}}$	$\mu^{III}.$
$M^{IV} = \mu^{III} N^{III} - M^{III}$	$N^{IV} = \frac{a - M^{IV} M^{IV}}{N^{III}}$	$\frac{M^{IV} + \sqrt{a}}{N^{IV}}$	$\mu^{IV}.$
$M^V = \mu^{IV} N^{IV} - M^{IV}$	$N^V = \frac{a - M^V M^V}{N^{IV}}$	$\frac{M^V + \sqrt{a}}{N^V}$	$\mu^V.$
&c.	&c.	&c.	&c.

und

und somit ist also $\sqrt{a} = \mu + \cfrac{1}{\mu^{I} + \cfrac{1}{\mu^{II} + \cfrac{1}{\mu^{III} + \cfrac{1}{\mu^{IIII} + \&c.}}}}$

wo wir der Kürze wegen nur die zwei ersten Reihen, für M, N und M^{I}, N^{I} wirklich berechnet; bei den andern aber blos angezeigt haben, nach welchem Gesetze sie aus diesen folgen.

§. 34. Es ist noch nöthig zu beweisen, daß die sich aus den vorhergehenden Formeln entwickelnden Werthe von M^{I}, M^{II} &c. wie auch von N^{I}, N^{II} &c. immer ganze, bejahte und zwischen leicht zu bestimmende Gränzen eingeschloßene Zahlen seyn müssen.

Diß zu zeigen, seyen $\frac{p^{oo}}{q^{oo}}$, $\frac{p^{o}}{q^{o}}$ zwei auf die eben gezeigte Art abgeleitete gegen $\sqrt{a}$ convergirende Brüche, die sich zunächst folgen, und lezterem gehöre der vollständige Quotient $\frac{M^{o} + \sqrt{a}}{N^{o}}$, so ist, (nach §. 11. Nro. 2.)

$$\sqrt{a} = \frac{p^{o}\left(\frac{M^{o} + \sqrt{a}}{N^{o}}\right) + p^{oo}}{q^{o}\left(\frac{M^{o} + \sqrt{a}}{N^{o}}\right) + q^{oo}}$$

$$= \frac{p^{o}\sqrt{a} + p^{o}M^{o} + p^{oo}N^{o}}{q^{o}\sqrt{a} + q^{o}M^{o} + q^{oo}N^{o}}$$

mithin

mithin

$$q^{\circ}a + q^{\circ}M^{\circ}\sqrt{a} + q^{\circ\circ}N^{\circ}\sqrt{a} = p^{\circ}\sqrt{a} + p^{\circ}M^{\circ} + p^{\circ\circ}N^{\circ},$$

folglich auch, wenn man die rationalen Glieder den rationalen, und die irrationalen den irrationalen gleich setzt:

$$p^{\circ}M^{\circ} + p^{\circ\circ}N^{\circ} = q^{\circ}a$$

und $$q^{\circ}M^{\circ} + q^{\circ\circ}N^{\circ} = p^{\circ}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist es leicht, folgende Werthe für M° und N° zu entwickeln:

$$M^{\circ} = \frac{q^{\circ}q^{\circ\circ}a - p^{\circ}p^{\circ\circ}}{p^{\circ}q^{\circ\circ} - q^{\circ}p^{\circ\circ}}, \text{ und } N^{\circ} = \frac{p^{\circ}p^{\circ} - aq^{\circ}q^{\circ}}{p^{\circ}q^{\circ\circ} - q^{\circ}p^{\circ\circ}}.$$

Da nun aber nach der Voraussetzung $\frac{p^{\circ\circ}}{q^{\circ\circ}}$, $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ zunächst auf einander folgende gegen $\sqrt{a}$ convergirende Brüche sind, so ist (§. 11. Nro. 3.)

$$p^{\circ}q^{\circ\circ} - q^{\circ}p^{\circ\circ} = \pm 1$$

und es sind also fürs erste M° und N° immer ganze Zahlen.

Daß sie aber überdiß auch immer bejaht seyen, erhellet also:

Nach §. 11. Nro. 3. ist $p^{\circ}q^{\circ\circ} - q^{\circ}p^{\circ\circ} = +1$, wenn $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ in der Reihe der gegen $\sqrt{a}$ convergirenden Brüche eine ungerade Stelle einnimmt, oder wenn $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} > \sqrt{a}$ ist, und $p^{\circ}q^{\circ\circ} - q^{\circ}p^{\circ\circ} = -1$, wenn

$\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ eine ungerade Stelle einnimmt, d. i. wenn

$\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} < \sqrt{a}$ ist.

Im ersten Falle, da nehmlich $p^{\circ} q^{\circ\circ} - q^{\circ} p^{\circ\circ} = +1$, und mithin $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} > \sqrt{a}$, ist auch $\frac{p^{\circ} p^{\circ}}{q^{\circ} q^{\circ}} > a$, und demnach $p^{\circ} p^{\circ} > a q^{\circ} q^{\circ}$, folglich $p^{\circ} p^{\circ} - a q^{\circ} q^{\circ}$ bejaht. Daher muß auch N°, welches $= \frac{p^{\circ} p^{\circ} - a q^{\circ} q^{\circ}}{p^{\circ} q^{\circ\circ} - q^{\circ} p^{\circ\circ}}$ ist, ebenfalls bejaht seyn; im andern Falle ist $p^{\circ} p^{\circ} - a q^{\circ} q^{\circ}$ verneint, mithin $\frac{p^{\circ} p^{\circ} - a q^{\circ} q^{\circ}}{p^{\circ} q^{\circ\circ} - q^{\circ} p^{\circ\circ}}$ oder N° abermals bejaht.

Ferner folgt aus $q^{\circ} M^{\circ} + q^{\circ\circ} N^{\circ} = p^{\circ}$, daß

$$\frac{q^{\circ\circ}}{q^{\circ}} = \frac{\left(\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} - M^{\circ}\right)}{N^{\circ}}$$ sey.

Da nun in der Reihe der gegen $\sqrt{a}$ convergirenden Brüche $\frac{p^{\circ\circ}}{q^{\circ\circ}}$, $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ ... nach (§. 11. Nro. 1.) q° nothwendig $> q^{\circ\circ}$ ist, so muß auch $N^{\circ} > \frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} - M^{\circ}$, (oder wegen $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} = \sqrt{a}$) $> \sqrt{a} - M^{\circ}$ seyn.

In so fern aber auch der vollständige Quotient (§. 6. Nro. 1. u. 2.) $\frac{M^{\circ} + \sqrt{a}}{N^{\circ}}$ nothwendig größer als die Einheit ist, hat man $N^{\circ} < \sqrt{a} + M^{\circ}$.

Diese

Diese beide Bedingungen $N^\circ > \sqrt{a} - M^\circ$, und

$$N^\circ < \sqrt{a} + M^\circ$$

sind nun absurd, so bald M° einen verneinten Werth haben könnte. Folglich ist auch M° ebenfalls immer bejaht.

Nunmehr ist es leicht, die Gränzen von M° und N° zu bestimmen. Wenn nehmlich $\frac{M^{\circ\circ} + \sqrt{a}}{N^{\circ\circ}}$ der unmittelbar vor $\frac{M^\circ + \sqrt{a}}{N^\circ}$ hergehende Quotient ist, so ist vermöge des im vorhergehenden §. Erwiesenen, $N^\circ N^{\circ\circ} = a - M^{\circ\circ} M^{\circ\circ}$. Folglich, da sowohl N°, als $N^{\circ\circ}$ immer bejaht ist, muß $M^{\circ\circ} < \sqrt{a}$ oder $< \alpha$ seyn, welche Größe die in $\sqrt{a}$ enthaltene gröste ganze Zahl bezeichnet.

Anderer Seits aber ist auch $M^\circ = \mu^{\circ\circ} N^{\circ\circ} - M^{\circ\circ}$, und also $M^\circ + M^{\circ\circ} = \mu^{\circ\circ} N^{\circ\circ}$. Da nun der höchste Werth von M° oder $M^{\circ\circ}$, wie wir eben gesehen, $= \alpha$ ist, so ist $M^\circ + M^{\circ\circ}$ höchstens $= 2\alpha$, und daher wird $\frac{2\alpha}{\mu^{\circ\circ}} = N^{\circ\circ}$ seyn, welcher Werth am grösten, und zwar $= 2\alpha$ ist, wenn die ganze Zahl $\mu^{\circ\circ} = 1$ ist. Es folgt hieraus, daß wenn $\frac{M + \sqrt{a}}{N}$ einen nach obigen Grundsätzen abgeleiteten vollständigen Quotienten der gegen $\sqrt{a}$ convergirenden Reihe vorstellt, M

höchstens = α und N höchstens = 2α seyn könne, wo α die in $\sqrt{a}$ enthaltene gröste ganze Zahl vorstellt.

§. 35. Nunmehr ist es leicht, als eine Folge aus dem bisherigen, folgende schöne Eigenschaft der Zahlen zu erweisen:

Die Quadratwurzel einer jeden Nichtquadratzahl läßt sich als einen periodischen continuirlichen Bruch vorstellen.

Denn wenn man, nach der so eben gezeigten Methode, die Quadratwurzel aus einer solchen Zahl a in einen continuirlichen Bruch verwandelt, und irgend einen vollständigen Quotienten desselben $\frac{M + \sqrt{a}}{N}$ heißt,

so haben wir im vorhergehenden §. erwiesen, daß M und N solche ganze, bejahte Zahlen seyn müssen, wovon jene nie grösser, als die gröste in $\sqrt{a}$ steckende ganze Zahl α, und diese nie grösser als 2α werden kann. Nun ist aber vermöge der Voraussetzung, a ein unvollkommenes Quadrat, also $\sqrt{a}$ irrational. Folglich besteht der die Grösse $\sqrt{a}$ ausdrükkende continuirliche Bruch aus unendlich vielen Gliedern; es kommen also auch unendlich viele vollständige Quotienten vor. Da aber bei diesen M und N in die bestimmten Gränzen α und 2α eingeschränkt sind, so müssen, bei einer ins unendliche fortgesetzten Rechnung eben dieselben Werthe von M oder N unendliche

Mal

Mal wieder erscheinen, und es wird bei allen möglichen Versetzungen, auch unzählige Mal derselbe Werth von M mit demselben von N zusammen treffen, und also eben derselbe vollständige Quotient zum zweitenmal zum Vorschein kommen. Geschiehet diß aber bei irgend einem derselben, so zeigen die vorhergehenden Formeln, daß auch alle aus demselben abgeleitete fernere vollständige Quotienten mit ihren Quotienten, mit denen auf jenen ersteren folgenden übereinstimmen, oder ihnen gleich seyn müssen. Auf diese Art kann sodann die Rechnung durch bloßes Wiederhohlen der bereits gefundenen Quotienten einer Periode so weit fortgesetzt werden, als man will.

Beispiel.

§. 36. Die Quadratwurzel von 86 durch continuirliche Brüche auszudrücken.

Erste Hälfte.

$M = 0.$	$N = 1.$
$M^{I} = \mu N - M = 9.$	$N^{I} = \frac{86 - M^{I}M^{I}}{N} = 5.$
$M^{II} = \mu^{I}N^{I} - M^{I} = 6.$	$N^{II} = \frac{86 - M^{II}M^{II}}{N^{I}} = 10.$
$M^{III} = \mu^{II}N^{II} - M^{II} = 4.$	$N^{III} = \frac{86 - M^{III}M^{III}}{N^{II}} = 7.$
$M^{IV} = \mu^{III}N^{III} - M^{III} = 3.$	$N^{IV} = \frac{86 - M^{IV}M^{IV}}{N^{III}} = 11.$
$M^{V} = \mu^{IV}N^{IV} - M^{IV} = 8.$	$N^{V} = \frac{86 - M^{V}M^{V}}{N^{IV}} = 2.$
$M^{VI} = \mu^{V}N - M^{V} = 8.$	$N^{VI} = \frac{86 - M^{VI}M^{VI}}{N^{V}} = 11.$
$M^{VII} = \mu^{VI}N^{VI} - M^{VI} = 3.$	$N^{VII} = \frac{86 - M^{VII}M^{VII}}{N^{VI}} = 7.$
$M^{VIII} = \mu^{VII}N^{VII} - M^{VII} = 4.$	$N^{VIII} = \frac{86 - M^{VIII}M^{VIII}}{N^{VII}} = 10.$
$M^{IX} = \mu^{VIII}N^{VIII} - M^{VIII} = 6.$	$N^{IX} = \frac{86 - M^{IX}M^{IX}}{N^{VIII}} = 5.$
$M^{X} = \mu^{IX}N^{IX} - M^{IX} = 9.$	$N^{X} = \frac{86 - M^{X}M^{X}}{N^{IX}} = 1.$
$M^{XI} = \mu^{X}N^{X} - M^{X} = 9.$	$N^{XI} = \frac{86 - M^{XI}M^{XI}}{N^{X}} = 5.$

Beispiel.

Beispiel.

§. 36. Die Quadratwurzel von 86 durch continuirliche Brüche auszudrücken.

Zweite Hälfte.

$\frac{M + \sqrt{a}}{N}$	$= \frac{0 + \sqrt{86}}{1}$	$\alpha = \mu = 9.$
$\frac{M^{I} + \sqrt{a}}{N^{I}}$	$= \frac{9 + \sqrt{86}}{5}$	$\mu^{I} = 3.$
$\frac{M^{II} + \sqrt{a}}{N^{II}}$	$= \frac{6 + \sqrt{86}}{10}$	$\mu^{II} = 1.$
$\frac{M^{III} + \sqrt{a}}{N^{III}}$	$= \frac{4 + \sqrt{86}}{7}$	$\mu^{III} = 1.$
$\frac{M^{IV} + \sqrt{a}}{N^{IV}}$	$= \frac{3 + \sqrt{86}}{11}$	$\mu^{I} = 1.$
$\frac{M^{V} + \sqrt{a}}{N^{V}}$	$= \frac{8 + \sqrt{86}}{2}$	$\mu^{V} = 8.$
$\frac{M^{VI} + \sqrt{a}}{N^{VI}}$	$= \frac{8 + \sqrt{86}}{11}$	$\mu^{VI} = 1.$
$\frac{M^{VII} + \sqrt{a}}{N^{VI}}$	$= \frac{3 + \sqrt{86}}{7}$	$\mu^{VII} = 1.$
$\frac{M^{VIII} + \sqrt{a}}{N^{VIII}}$	$= \frac{4 + \sqrt{86}}{10}$	$\mu^{VIII} = 1.$
$\frac{M^{IX} + \sqrt{a}}{N^{IX}}$	$= \frac{6 + \sqrt{86}}{5}$	$\mu^{IX} = 3.$
$\frac{M^{X} + \sqrt{a}}{N^{X}}$	$= \frac{9 + \sqrt{86}}{1}$	$\mu^{X} = 18.$
$\frac{M^{XI} + \sqrt{a}}{N^{XI}}$	$= \frac{9 + \sqrt{86}}{5}$	$\mu^{XI} = 3.$

Da nun hier der vollständige Quotient $\frac{M^{XI} + \sqrt{a}}{N^{XI}}$ dem zweiten $\frac{M^{I} + \sqrt{a}}{N^{I}}$ gleich ist, nehmlich $M^{XI} = M^{I} = 9$ und $N^{XI} = N^{I} = 5$, mithin auch $\mu^{XI} = \mu^{I} = 3$, so muß nothwendig wieder $M^{XII} = M^{II} = 6$, $N^{XII} = N^{II} = 10$, also auch $\mu^{XII} = \mu^{II} = 1$ u. s. w. werden. Es hört also die Rechnung hier auf, und die auf μ^{XI} folgende Quotienten sind nichts anders, als eine Wiederhohlung derjenigen, die die erste Periode bilden, nehmlich von 3, 1, 1, 1, 8, 1, 1, 1, 3, 18, welche Periode demnach ins Unendliche wiederhohlt wird. Daher ist:

$$\sqrt{86} = 9 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{3 + *}}}}}}}}}}}$$

$$* + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{3 + \&c.}}}}}}}}}}$$

Aus diesen Werthen von μ, μ^{I}, μ^{II}, &c. können hierauf die gegen $\sqrt{86}$ convergirenden Brüche nach §. 8. 9. berechnet werden.

Mehrere Beispiele hier noch anzuführen, wird überflüßig seyn, da sowohl dieses hier berechnete, als die §. 33. gegebene allgemeine Vorschrift, die an sich leichte Rechnung hinlänglich erläutern. Wir gehen daher zur Ausziehung der Cubicwurzel über.

Aus=

Ausziehung der Cubicwurzel vermittelst der continuirlichen Brüche.

§. 37. Es lassen sich bei Ausziehung der Cubicwurzel aus solchen Zahlen, die keine ächte Cubiczahlen oder Würfel sind, ähnliche Betrachtungen, wie die der vorhergehenden §. sind, anstellen: obgleich die Resultate, wie sich zum voraus vermuthen läßt, schon etwas weniger einfache Formeln geben werden. Wir fangen, ehe wir die Sache allgemein behandeln, wie oben, der Deutlichkeit wegen, mit einem besondern Beispiele an.

Aufgabe.

Aus der Zahl 47 die Cubicwurzel vermittelst der continuirlichen Brüche auszuziehen?

Da 3 die nächstkleinere Cubicwurzel aus 47 ist, so setze man $\sqrt[3]{47} = 3 + \frac{1}{x}$, wo demnach $x > 1$ seyn muß. Also ist

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{47} - 3}$$

um nun die in diesem Ausdruck steckende größte ganze Zahl zu finden, trage man, nach der Vorschrift §. 22. die Irrationalität aus dem Nenner in den Zähler über, und multiplicire zu dem Ende Zähler und Nenner mit $\sqrt[3]{47^2} + \beta\sqrt[3]{47} + \gamma$, wo β und γ noch unbestimmte Größen vorstellen; Folglich ist

$$x = \frac{\sqrt[3]{47^2} + \beta\sqrt[3]{47} + \gamma}{47 + (\beta - 3)\sqrt[3]{47^2} + (\gamma - 3\beta)\sqrt[3]{47} - 3\gamma}$$

Da

Da nun die Wurzelzeichen in dem Nenner verschwinden sollen, so müssen die unbestimmten Größen β und γ dergestalt angenommen werden, daß $\beta - 3 = 0$ und $\gamma - 3\beta = 0$ ist. Aus der ersten Bedingung folgt $\beta = 3$, und aus der zweiten $\gamma = 3\beta = 9$.

Es ist also

$$x = \frac{\sqrt[3]{47^2} + 3\sqrt[3]{47} + 9}{47 - 27} = \frac{\sqrt[3]{47^2} + 3\sqrt[3]{47} + 9}{20}.$$

Es ist aber die nächstkleinere Cubicwurzel von 47^2 in ganzen Zahlen 13, also ist die gröste in dem Ausdrucke für x enthaltene ganze Zahl 1. Man setze daher

$$\frac{\sqrt[3]{47^2} + 3\sqrt[3]{47} + 9}{20} = 1 + \frac{1}{x^1},$$

hieraus folgt $x^1 = \dfrac{20}{\sqrt[3]{47^2} + 3\sqrt[3]{47} - 11}$

Um auch hier die Irrationalität aus dem Nenner hinweg zu bringen, multiplicire man vordersamst Zähler und Nenner mit $\sqrt[3]{47} + m$. Diß gibt

$$x^1 = \frac{20(\sqrt[3]{47} + m)}{47 + (m+3)\sqrt[3]{47^2} + (3m - 11)\sqrt[3]{47} - 11m}$$

nimmt man also $m = -3$, so wird

$$x^1 = \frac{20(\sqrt[3]{47} - 3)}{80 - 20\sqrt[3]{47}} = \frac{\sqrt[3]{47} - 3}{4 - \sqrt[3]{47}}$$

Und nun multiplicire man noch einmal Zähler und Nenner mit $\sqrt[3]{47^2} + \beta\sqrt[3]{47} + \gamma$, daher

$x^1 =$

$$x^{I} = \frac{(\sqrt[3]{47} - 3)(\sqrt[3]{47^2} + \beta\sqrt[3]{47} + \gamma)}{-47 + (4-\beta)\sqrt[3]{47^2} + (4\beta - \gamma)\sqrt[3]{47} + 4\gamma}$$

Es muß also $\beta = 4$ und $\gamma = 4\beta = 16$ genommen werden. Dadurch verwandelt sich der Ausdruck von x^{I} in diesen

$$x^{I} = \frac{(\sqrt[3]{47} - 3)(\sqrt[3]{47^2} + 4\sqrt[3]{47} + 16)}{17}$$

oder in diesen:

$$x^{I} = \frac{\sqrt[3]{47^2} + 4\sqrt[3]{47} - 1}{17} = 1 + \frac{1}{x^{II}}.$$

und durch ähnliche Kunstgriffe findet sich

$$x^{II} = \frac{\sqrt[3]{47^2} + \frac{7}{2}\sqrt[3]{47} + 4}{\frac{33}{2}} = 1 + \frac{1}{x^{III}} \text{ u. s. w.}$$

Daher ist $\sqrt[3]{47} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \&c.}}}$

§. 38. Es wäre aber diese Rechnung, so wie sie hier geführt wurde, von einer abschreckenden Länge. Wir wollen daher versuchen, ob sie sich nicht bequemer machen lasse. Zu dem Ende wollen wir annehmen, man sey, indem man aus der Zahl a die Cubicwurzel gezogen, durch Schlüsse, die den vorhergehenden vollkommen gleichen, bis auf den vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt[3]{a^2} + m\sqrt[3]{a} + n}{p}$ gekommen, in welchem

m, n, p,

m, n, p, bekannte Größen vorstellen, und es sey die gröste darinn enthaltene Zahl μ, so daß also

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + m\sqrt[3]{a} + n}{p} = \mu + \frac{1}{y}$$ ist, so hat man

$$y = \frac{p}{\sqrt[3]{a^2} + m\sqrt[3]{a} + n}.$$ Da nun auch

dieser vollständige Quotient von der Form

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + \alpha\sqrt[3]{a} + \beta}{\gamma}$$ seyn wird,

so ist $$\frac{p}{\sqrt[3]{a^2} + m\sqrt[3]{a} + n} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \alpha\sqrt[3]{a} + \beta}{\gamma}$$

Schafft man hier auf beiden Seiten die Brüche hinweg, und sezt diejenigen Glieder, worinn einerlei Potenzen von a vorkommen, einander gleich, so erhält man diese drei Gleichungen:

$$p\gamma = ma + \alpha a + (n - \mu p)\beta,$$
$$a + \alpha(n - \mu p) + m\beta = 0.$$
$$\beta + \alpha m + n - \mu p = 0.$$

aus denen die drei Größen α, β, γ, dergestalt bestimmt werden, daß

$$\beta = \frac{(n - \mu p)^2 - am}{m^2 - (n - \mu p)},$$ so dann

$$\alpha = \frac{-\beta - (n - \mu p)}{m},$$ und endlich

$$\gamma = \frac{(m + \alpha)a + (n - \mu p)\beta}{p}$$ ist.

Um diesen Werthen eine etwas einfachere Form zu geben, setze man $n - \mu p = N$; so ist

$$\beta = \frac{N^2 - am}{m^2 - N},$$

α =

$$\alpha = \frac{-\beta - N}{m}$$

$$\gamma = \frac{(m+\alpha)a + N\beta}{p}$$

Wenn man daher einen vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt[3]{a^2} + m\sqrt[3]{a} + n}{p}$ und den in ihm steckenden Quotienten μ kennt, so kennt man durch diese Formeln auch den folgenden vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt[3]{a^2} + \alpha\sqrt[3]{a} + \beta}{\gamma}$, und mithin auch den ihm enthaltenen Quotienten μ.

Man setze nun in die obigen Formeln für m, n, p, μ, N, die respectiven Werthe α, β, γ, μ^1, N^1, welcher letztere nehmlich $= \beta - \mu^1\gamma$ ist, so findet sich ein neuer vollständiger Quotient

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + \alpha^1\sqrt[3]{a} + \beta^1}{\gamma^1}$$

und aus diesem wieder einer, und so fort ins Unendliche. Alles kommt demnach darauf an, den ersten vollständigen Quotienten zu wissen. Dieser kann aber, nach der oben an einem Beispiele gezeigten Methode, allgemein also bestimmt werden:

Es sey $\sqrt[3]{a} = a^1 + \frac{1}{x}$, wo a^1 die nächstkleinere Cubicwurzel von a in ganzen Zahlen bedeutet; so ist $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a} - a^1}$, oder wenn man Zähler und

Nenner

Nenner mit $\sqrt[3]{a^2} + m \sqrt[3]{a} + n$ multiplicirt,

$$x = \frac{\sqrt[3]{a^2} + m \sqrt[3]{a} + n}{a - na^{I} + (m - a^{I}) \sqrt[3]{a^2} + (n - ma^{I}) \sqrt[3]{a}.}$$

Soll nun die Irrationalität im Nenner verschwinden, so muß $m = a^{I}$, und $n = \alpha\, a^{I} = a^{I}\, a^{I}$ angenommen werden. Diß gibt

$$x = \frac{\sqrt[3]{a^2} + a^{I} \sqrt[3]{a} + a^{I}\, a^{I}}{a - a^{I}\, a^{I}\, a^{I}}.$$

Wir haben demnach $m = a^{I}$, $n = a^{I}\, a^{I}$ und $p = a - a^{I}\, a^{I}\, a^{I}$, und aus diesen Werthen lassen sich demnach unzählig viele andere herleiten.

§. 39. Wenn also, um das vorige Beispiel noch einmal zu wählen und weiter auszuführen, aus der Zahl 47 die Cubicwurzel durch continuirliche Brüche vorgestellt werden soll; so wird die Berechnung hiezu folgende seyn.

Da $a = 47$; so ist $a^{I} = 3$, $a^{I}\, a^{I} = 9$, $a^{I}\, a^{I}\, a^{I} = 27$, und mithin $m = a^{I} = 3$, $n = a^{I} a^{I} = 9$, und $p = a - a^{I} a^{I} a^{I} = 47 - 27 = 20$, und demnach der erste vollständige Quotient $\frac{\sqrt[3]{47^2} + 3 \sqrt[3]{47} + 9}{20}$

$= 1 + \frac{1}{x}$. Also $\mu = 1$.

Diesen vollständigen Quotienten nebst seinem Quotienten 1 trage man nun zuerst in die Tabelle ein, und setze sodann die Rechnung vermittelst obiger Formeln weiter fort, und zwar so, daß die jedesmal sich ergebenden α, β, γ, μ^{I}, N^{I}, für m, n, p, μ, N, aufs neue in jene Formeln gesetzt werden.

Tabelle.

Tabelle. Erste Hälfte.

$N = n - \mu p$ $= -11.$	$\beta = \dfrac{N^2 - am}{m^2 - N}$ $= -1.$	$\alpha = \dfrac{-\beta - N}{m}$ $= 4.$
$N^{I} = \beta - \mu^{I}\gamma$ $= -18.$	$\beta^{I} = \dfrac{N^{I\,2} - a\alpha}{\alpha^2 - N^{I}}$ $= 4.$	$\alpha^{I} = \dfrac{-\beta^{I} - N^{I}}{\alpha}$ $= \frac{7}{2}.$
$N^{II} = \beta^{I} - \mu^{II}\gamma^{I}$ $= -\frac{25}{2}.$	$\beta^{II} = \dfrac{N^{II\,2} - a\alpha^{I}}{\alpha^{I\,2} - N^{II}}$ $= -\frac{1}{3}.$	$\alpha^{II} = \dfrac{-\beta^{II} - N^{II}}{\alpha^{I}}$ $= \frac{11}{3}.$
$N^{III} = \beta^{II} - \mu^{III}\gamma^{II}$ $= -21.$	$\beta^{III} = \dfrac{N^{III\,2} - a\alpha^{II}}{\alpha^{II\,2} - N^{III}}$ $= \frac{39}{5}.$	$\alpha^{III} = \dfrac{-\beta^{III} - N^{III}}{\alpha^{II}}$ $= \frac{18}{5}.$
$N^{IV} = \beta^{III} - \mu^{IV}\gamma^{III}$ $= -18.$	$\beta^{IV} = \dfrac{N^{IV\,2} - a\alpha^{III}}{\alpha^{III\,2} - N^{IV}}$ $= 5.$	$\alpha^{IV} = \dfrac{-\beta^{IV} - N^{IV}}{\alpha^{III}}$ $= \frac{65}{18}.$
$N^{V} = \beta^{IV} - \mu^{V}\gamma^{IV}$ $= -\frac{431}{18}.$	$\beta^{V} = \dfrac{N^{V\,2} - a\alpha^{IV}}{\alpha^{IV\,2} - N^{V}}$ $= \frac{251}{23}.$	$\alpha^{V} = \dfrac{-\beta^{V} - N^{V}}{\alpha^{IV}}$ $= \frac{83}{23}.$

Tabelle. Zweite Hälfte.

	Vollständige Quotienten.	Quotienten.
	$\frac{\sqrt[3]{47^2}+3\sqrt[3]{47}+9}{20}$	$1=\mu$.
$\gamma=\frac{(m+\alpha)a+\beta N}{p}=17$.	$\frac{\sqrt[3]{47^2}+4\sqrt[3]{47}-1}{17}$	$1=\mu^{I}$.
$\gamma^{I}=\frac{(\alpha^{I}+\alpha)a+\beta^{I}N^{I}}{\gamma}=\frac{33}{2}$.	$\frac{\sqrt[3]{47^2}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{47}+4}{\frac{33}{2}}$	$1=\mu^{II}$.
$\gamma^{II}=\frac{(\alpha^{II}+\alpha^{I})a+\beta^{II}N^{II}}{\gamma^{I}}=\frac{62}{3}$.	$\frac{\sqrt[3]{47^2}+\frac{11}{3}\sqrt[3]{47}-\frac{1}{3}}{\frac{62}{3}}$	$1=\mu^{III}$.
$\gamma^{III}=\frac{(\alpha^{III}+\alpha^{II})a+\beta^{III}N^{II}}{\gamma^{II}}=\frac{43}{5}$.	$\frac{\sqrt[3]{47^2}+\frac{18}{5}\sqrt[3]{47}+\frac{39}{5}}{\frac{43}{5}}$	$3=\mu^{IV}$.
$\gamma^{IV}=\frac{(\alpha^{IV}+\alpha^{III})a+\beta^{IV}N^{IV}}{\gamma^{III}}=\frac{521}{18}$.	$\frac{\sqrt[3]{47^2}+\frac{65}{18}\sqrt[3]{47}+5}{\frac{521}{18}}$	$1=\mu^{V}$.
$\gamma^{V}=\frac{(\alpha^{V}+\alpha^{IV})a+\beta^{V}N^{V}}{\gamma^{IV}}=\frac{62}{23}$.	$\frac{\sqrt[3]{47^2}+\frac{83}{23}\sqrt[3]{47}+\frac{251}{23}}{\frac{62}{23}}$	$13=\mu^{VI}$.

Weiter wird es nicht nöthig seyn, die Rechnung fortzuführen, da der Geist dieser Methode aus dem bisherigen sattsam erhellet. Und nun nur noch einige Bemerkungen darüber.

1) Man siehet, daß die Formeln zur Ausziehung der Cubicwurzeln bei weitem nicht so einfach und bequem sind, als die für die Quadratwurzeln, indem die Größen N, α, β, γ, auch Brüche werden können; auch sind überdiß die aus denselben zusammen gesetzten Werthe viel verwickelter, als diejenigen, wodurch die Quadratwurzeln bestimmt werden.

2) Je nachdem die Werthe von α, β, γ, beschaffen sind, kann man bei Bestimmung der in dem vollständigen Quotienten enthaltenen grösten ganzen Zahl sehr leicht einen Fehler von einer oder mehreren Einheiten begehen; denn wenn die nächstkleinere Cubicwurzel aus der Zahl a gleich a^1 ist, so ist die ganze Zahl, die in $\alpha\sqrt[3]{a}$ stekt, nicht immer $= a^1\alpha$, sondern sie kann grösser seyn, als dieser Werth. Ein gleiches gilt auch von $\sqrt[3]{a^2}$, und den mit dieser Größe multiplicirten Zahlen. Diß war wirklich der Fall bei dem letzten vollständigen Quotienten

$$\frac{\sqrt[3]{47^2} + \frac{83}{23}\sqrt[3]{47} + \frac{251}{23}}{2\frac{2}{3}}$$

welcher sich auf

$$\frac{23\sqrt[3]{47^2} + 83\sqrt[3]{47} + 251}{62}$$

reducirt. Sezt man nehmlich hier $\sqrt[3]{47^2} = 13$,

und

und $\sqrt[3]{47} = 3$, so ist der Zähler dieses Bruchs 799 also der in $\frac{799}{62}$ stekende ganze Quotieut 12. Er ist aber wenigstens 13. Denn, wenn man auch nur die ersten für $\sqrt[3]{47}$ gefundenen Quotienten 3, 1, 1, 1, annimmt, um einen ungefähren Ueberschlag zu machen, so ist $\sqrt[3]{47} > 3, 5$; also $83 \sqrt[3]{47} > 290$. Daher, ohne auf $23 \sqrt[3]{47^2}$ Rücksicht zu nehmen,

$$\frac{23 \sqrt[3]{47^2} + 83 \sqrt[3]{47} + 251}{62} > \frac{840}{62} > 13.$$

Doch diesem Fehler könnte, wie man siehet, immer leicht abgeholfen werden. Auch ist er nicht so bedeutend, da aus ihm weiter nichts folgt, als daß die Näherung etwas langsamer geschiehet. Von größerer Wichtigkeit ist hingegen die Nr. 1. angeführte Unannehmlichkeit, und der Umstand, daß der continuirliche Bruch, der $\sqrt[3]{a}$ ausdrükt, nicht nothwendig periodisch ist, wie es bei den Quadratwurzeln der Fall war. Daher ich denn dieser Auflösung auch keinen größeren Werth beilege, als sie verdient, und mich begnüge, gezeigt zu haben, was von einer auf die Cubicwurzeln angewendeten Methode, die bei Verwandlung der Quadratwurzeln in continuirliche Brüche so zierliche Auflösungen gibt, zu erwarten war, woraus auch zugleich der Schluß auf noch höhere Wurzeln gemacht werden kann.

C.) Anwendung der continuirlichen Brüche auf Reihen.

§. 40. Die wichtige Lehre von den Reihen empfängt eine nicht unbeträchtliche Erweiterung durch Anwendung der continuirlichen Brüche auf dieselbe. Es hat nehmlich schon Euler im XVIII. Kapitel seiner Introductio &c. §. 365. u. f. gezeigt, wie jede Reihe mit abwechselnden Gliedern in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden könne, dessen Werth der Summe jener Reihe gleich sey. Diese Methode gründet sich auf §. 20. und führet meistens auf Brüche von der Form

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \&c.}}$$

Wir theilen daher folgende, von ihr ganz verschiedene, mit, die den Vortheil zu haben scheint, daß sie allgemein ist, und demnach auf jede Reihen, ihre Glieder mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, angewendet werden kann. Sie ist im Wesentlichen einerlei mit derjenigen, die §. 26. vorgetragen ist, und vermittelst deren man den Werth eines gegebenen Bruchs in Zahlen durch continuirliche Brüche ausdrückt. Man verfährt nehmlich, nach der daselbst gegebenen Vorschrift eben so, als ob man den gemeinschaftlichen Theiler von dem Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs suchen wollte, und formirt alsdann aus den sich ergebenden Quotienten den continuirlichen Bruch. Eben diese Regel läßt sich nun auch sehr leicht auf die Reihen anwenden.

§. 41.

§. 41. Es sey also

$$y = a + b + c + d + e + f + g + \&c.$$

irgend eine Reihe, deren Glieder a, b, c, &c. nach einem gewissen Gesetze fortgehende Potenzen von x, mit beständigen, bejahten oder verneinten Coefficienten multiplicirt, vorstellen, und y sey diejenige Größe, der sich die Summe aller Glieder dieser Reihe nähert: So ist für sich klar, daß wenn a, b, c, &c. lauter ganze bejahte Zahlen wären, in diesem Falle gar keine Frage davon seyn könnte, den Werth von y als einen continuirlichen Bruch darzustellen. Diesen Fall setzen wir demnach beiseite, und nehmen an, daß die Glieder der Reihe für y entweder Brüche, oder ganze Zahlen, vermischt mit Brüchen, und zwar theils bejaht, theils verneint, vorstellen. Und hier ist denn allerdings die Frage sehr natürlich, welches derjenige Werth von y sey, dem sich dieselben immer mehr nähern. Dabei sind denn die beiden Fälle $y < 1$, und $y > 1$, von einander zu unterscheiden.

I. Verwandlung der Reihe $y = a + b + c + d + \&c.$ in einen continuirlichen Bruch, in der Voraussetzung, daß $y < 1$ ist.

§. 42. Da $y = a + b + c + d + e + \&c.$ und der Zähler kleiner, als der Nenner ist, so dividire man beide durch den Zähler. Diß gibt

$$y = \frac{1}{1 : a + b + c + d + e + \&c.}$$

Wenn man nun 1 durch $a + b + c + d +$ &c. theilt, so ist der Quotient $\frac{1}{a}$, und der Ueberrest

$$-\frac{b}{a} - \frac{c}{a} - \frac{d}{a} - \frac{e}{a} - \&c.$$

Dieser Ueberrest in den vorigen Divisor $a + b + c + d +$ &c. getheilt, gibt den Quotienten $-\frac{a^2}{b}$, und den neuen Ueberrest

$$\frac{b^2 - ac}{b} + \frac{bc - ad}{b} + \frac{bd - ae}{b} + \frac{be - af}{b} + \&c.$$

wofür wir setzen: $A + B + C + D +$ &c. theilt man diesen abermals in den vorigen Divisor: $-\frac{b}{a} - \frac{c}{a} - \frac{d}{a} - \frac{e}{a} -$ &c. so entsteht der Quotient

$-\frac{b}{Aa}$, und Ueberrest

$$\frac{bB - Ac}{Aa} + \frac{bC - Ad}{Aa} + \frac{bD - Ae}{Aa} + \frac{bE - Af}{Aa} + \&c.$$

für welchen wir setzen:

$$A^{I} + B^{I} + C^{I} + D^{I} + E^{I} + \&c.$$

Es ist demnach der folgende Quotient $\frac{A}{A^{I}}$, und der Ueberrest

$$\frac{A^{I}B - AB^{I}}{A^{I}} + \frac{A^{I}C - AC^{I}}{A^{I}} + \frac{A^{I}D - AD^{I}}{A^{I}} + \frac{A^{I}E - AE^{I}}{A^{I}} + \&c.$$

oder $A^{II} + B^{II} + C^{II} + D^{II} + E^{II} +$ &c.

woraus ein neuer Quotient $\frac{A^{I}}{A^{II}}$ entsteht, und so weiter.

Um alſo den gegen y convergirenden continuirlichen Bruch zu finden, mache man folgende Berechnung:

$\frac{b^2 - ac}{b} = A$	$\frac{bB - Ac}{Aa} = A^I$	$\frac{A^I B - A B^I}{A^I} = A^{II}$	$\frac{A^{II} B^I - A^I B^{II}}{A^{II}} = A^{III}$	&c.
$\frac{bc - ad}{b} = B$	$\frac{bC - Ad}{Aa} = B^I$	$\frac{A^I C - A C^I}{A^I} = B^{II}$	$\frac{A^{II} C^I - A^I C^{II}}{A^{II}} = B^{III}$	&c.
$\frac{bd - ae}{b} = C$	$\frac{bD - Ae}{Aa} = C^I$	$\frac{A^I D - A D^I}{A^I} = C^{II}$	$\frac{A^{II} D^I - A^I D^{II}}{A^{II}} = C^{III}$	&c.
$\frac{be - af}{b} = D$	$\frac{bE - Af}{Aa} = D^I$	$\frac{A^I E - A E^I}{A^I} = D^{II}$	$\frac{A^{II} E^I - A^I E^{II}}{A^{II}} = D^{III}$	&c.
$\frac{bf - ag}{b} = E$	$\frac{bF - Ag}{Aa} = E^I$	$\frac{A^I F - A F^I}{A^I} = E^{II}$	$\frac{A^{II} F^I - A^I F^{II}}{A^{II}} = E^{III}$	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	

so ergibt sich hieraus

$$y = a + b + c + d + e + f + \&c.$$

$$= \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{-a^2 : b + \cfrac{1}{-b : Aa + \cfrac{1}{A : A^{I} + \cfrac{1}{A^{I} : A^{II} + \cfrac{1}{A^{II} : A^{III} + \cfrac{1}{A^{III} : A^{IV} + \cfrac{1}{A^{IV} : A^{V} + \&c.}}}}}}}}$$

II. Verwandlung der Reihe

$$y = \frac{a + b + c + d + e + \&c.}{1}$$

in einen continuirlichen Bruch, in der Voraussetzung, daß $y > 1$ ist.

§. 43. Diese Auflösung ist von der vorhergehenden in nichts unterschieden, als daß man in

$$y = a + b + c + d + e + \&c.$$

Zähler und Nenner zuerst durch letzteren, nehmlich durch 1 theilt. Befolgt man im übrigen die vorhergehende Methode, und theilt immer jeden Ueberrest in den vorhergehenden Divisor, und setzt der Kürze wegen:

db—

$\frac{db - c^2}{c} = A$	$\frac{Ad - Bc}{Ab} = A^{I}$	$\frac{A^{I}B - AB^{I}}{A^{I}} = A^{II}$	$\frac{A^{II}B^{I} - A^{I}B^{II}}{A^{II}} = A^{III}$	&c.
$\frac{eb - dc}{c} = B$	$\frac{Ae - Cc}{Ab} = B^{I}$	$\frac{A^{I}C - AC^{I}}{A^{I}} = B^{II}$	$\frac{A^{II}C^{I} - A^{I}C^{II}}{A^{II}} = B^{III}$	&c.
$\frac{fb - ec}{c} = C$	$\frac{Af - Dc}{Ab} = C^{I}$	$\frac{A^{I}D - AD^{I}}{A^{I}} = C^{II}$	$\frac{A^{II}D^{I} - A^{I}D^{II}}{A^{II}} = C^{III}$	&c.
$\frac{gb - fc}{c} = D$	$\frac{Ag - Ec}{Ab} = D^{I}$	$\frac{A^{I}E - AE^{I}}{A^{I}} = D^{II}$	$\frac{A^{II}E^{I} - A^{I}E^{II}}{A^{II}} = D^{III}$	&c.
$\frac{hb - gc}{c} = E$	$\frac{Ah - Fc}{Ab} = E^{I}$	$\frac{A^{I}F - AF^{I}}{A^{I}} = E^{II}$	$\frac{A^{II}F^{I} - A^{I}F^{II}}{A^{II}} = E^{III}$	&c.
$\frac{ib - hc}{c} = F$	$\frac{Ai - Gc}{Ab} = F^{I}$	$\frac{A^{I}G - AG^{I}}{A^{I}} = F^{II}$	$\frac{A^{II}G^{I} - A^{I}G^{II}}{A^{II}} = F^{III}$	&c.
&c.	&c.	&c.	&c.	

so sind die daraus entspringenden Quotienten:

$$a, \; +\frac{1}{b}, \; -\frac{b^2}{c}, \; +\frac{c}{Ab}, \; +\frac{A}{A^I}, \; +\frac{A^I}{A^{II}}, \; +\frac{A^{II}}{A^{III}} \; \&c.$$

und daher ist

$$y = a + \cfrac{1}{+1:b + \cfrac{1}{-b^2:c + \cfrac{1}{+c:Ab + \cfrac{1}{+A:A^I + \cfrac{1}{+A^I:A^{II} + \cfrac{1}{+A^{II}:A^{III} + \cfrac{1}{A^{III}:A^{IV} + \&c.}}}}}}}$$

§. 44. Ehe wir zu einigen, das bisherige erläuternden Beispielen übergehen, wird es nicht überflüßig seyn, einige Bemerkungen voraus zu schicken.

1) Die beiden hier gegebenen Auflösungen sind im Wesentlichen nicht von einander verschieden: denn, wenn $a + b + c + \&c.$ der Kürze wegen $= P$ gesezt wird, so ist es eben so wohl erlaubt, den Werth $y = \frac{P}{1}$ in $\frac{P:P}{1:P}$, d. i. in $\frac{1}{1:P}$, als auch in $\frac{P:1}{1:1}$ zu verwandeln, und im ersten Falle die Einheit durch P, im andern aber P durch die Einheit zu dividiren; nach Analogie der Brüche §. 26. ist es aber natürlich, bei solchen P, die < 1 sind, die erste Operation, und bei solchen, die > 1 sind, die zweite zu gebrauchen. Uebrigens führen beide Wege zum Ziele: nur öfters einer langsamer als der andere.

2) Unter den sich durch die vorige Auflösung ergebenden Quotienten können auch solche vorkommen, deren Nenner verneint sind. In diesem Falle hat man sich nach §. 17. zu richten, um die verneinten Glieder in bejahte zu verwandeln.

3) Da die so eben gefundenen Quotienten wenigstens zum Theil Brüche seyn können, so würde das §. 9. 10. angegebene Schema, die gegen y convergirenden Brüche daraus herzuleiten, allzu mühsam seyn. Diß zu vermeiden, fange man jenes Schema also an: $\begin{array}{c|c} m & o \\ \hline o & m \end{array}$, indem man, anstatt der Einheit, eine unbestimmte Zahl m sezt. Denn auf diese Art werden die sich ergebenden Brüche sich von denen §. 8. 9. 10. nur dadurch unterscheiden, daß Zähler und Nenner mit m multiplicirt sind. Wenn nehmlich α, β, γ, einige Anfangsquotienten vorstellen, und man macht:

$$\begin{array}{lr|l} & m & o \\ \hline \alpha \text{ - - - - - - - -} & o & m \\ \beta \text{ - - - - -} & m & \alpha m \\ \gamma \text{ - - -} & \beta m + o & \beta\alpha m + m \\ \delta \text{ - - -} & \gamma\beta m + m & \gamma\beta\alpha m + \gamma m + \alpha m \\ & \&c. & \&c. \end{array}$$

so sind die Brüche $\frac{\alpha m}{m}$, $\frac{\beta\alpha m + m}{\beta m}$, $\frac{\gamma\beta\alpha m + \gamma m + \alpha m}{\gamma\beta m + m}$, &c. mit dem obigen §. 8. 9. 10. einerlei, indem sie sich in der äussern Form nur in so fern von demselben un-

terschei-

terscheiden, daß Zähler und Nenner mit m multiplicirt sind. Man wähle also für das beliebige m eine solche Zahl, daß sowohl die Zähler, als Nenner, der verschiedenen gegen y convergirenden Brüche ganze Zahlen werden, und bringe diese, wenn es nöthig seyn sollte, auf ihre kleinste Benennung: so werden die endlich erhaltenen gegen y convergirenden Brüche von denen §. 8. 9. 10. in nichts verschieden seyn, und sich also nach eben den Gesetzen der Gränze y nähern.

Nach diesen Bemerkungen gehen wir zu einigen erläuternden Beispielen über.

I. Beispiel.

§. 45. Man soll die Reihe

$$y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \&c.$$

welche den hyperbolischen Logarithmen von $1 + x$ ausdrückt, in einen continuirlichen Bruch verwandeln.

Auflösung.

Es bedeute y eine solche Zahl, deren hyperbolischer Logarithme kleiner als die Einheit ist, so können wir die Formeln der ersten Verwandlung §. 42. anwenden.

Nach

Nach diesen ist

$a = x$	$A = \frac{x^2}{6}$	$A^{I} = \frac{x^2}{6}$	$A^{II} = \frac{x^3}{5.6}$	$A^{III} = \frac{x^3}{4.5}$	$A^{IV} = \frac{x^4}{4.5.7}$
$b = -\frac{x^2}{2}$	$B = -\frac{x^3}{6}$	$B^{I} = -\frac{x^3}{5}$	$B^{II} = -\frac{x^4}{4.5}$	$B^{III} = -\frac{3x^4}{5.7}$	&c.
$c = \frac{x^3}{3}$	$C = \frac{3x^4}{20}$	$C^{I} = \frac{x^4}{5}$	$C^{II} = \frac{2x^5}{5.7}$	&c.	
$d = -\frac{x^4}{4}$	$D = -\frac{2x^5}{15}$	$D^{I} = -\frac{4x^5}{3.7}$	&c.		
$e = \frac{x^5}{5}$	$E = \frac{5x^6}{6.7}$	$E^{I} = \frac{5x^6}{4.7}$			
$f = -\frac{x^6}{6}$	$F = -\frac{3x^7}{4.7}$	$F^{I} = -\frac{3x^7}{2.3}$			
$g = \frac{x^7}{7}$	&c.	&c.			
&c.					

Es ist daher die Reihe der Quotienten

$$\frac{1}{a},\ -\frac{a^2}{b},\ -\frac{b}{Aa},\ \frac{A}{A^{I}},\ \frac{A^{I}}{A^{II}},\ \frac{A^{II}}{A^{III}},\ \frac{A^{III}}{A^{IV}}\ \&c.$$

folgende:

$$\frac{1}{x},\ 2,\ \frac{3}{x},\ 1,\ \frac{5}{x},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{x},\ 2,\ \&c.$$

oder, um das Gesez des Fortgangs derselben deutlicher zu zeigen,

$$\frac{1}{x},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{x},\ \frac{2}{2},\ \frac{5}{x},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{x},\ \frac{2}{4},\ \&c.$$

daher ist

$$\text{Log.}(1+x) = \cfrac{1}{1:x + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:x + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:x + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:x + \cfrac{1}{2:4 + \cfrac{1}{9: + \&c.}}}}}}}}}$$

wo x jede Zahl bedeuten kann, die so beschaffen ist, daß Log. (1 + x) die Einheit nicht übertrift. Es kann daher x entweder die Einheit selbst, oder jeder eigentliche Bruch seyn.

Es

Es sey, z. B. $x = \frac{1}{3}$, so ist Log. $(1 + x)$ oder Log. $\frac{4}{3}$

$$= \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{21 + \cfrac{1}{1:2 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{2:5 + 1 \text{ \&c.}}}}}}}}}}$$

Da nun hier die Brüche 2:3; 1:2; und 2:5; vorkommen, so muß das m (§. 44. Nro. 3.) also genommen werden, daß es durch 3, 2, und 5, theilbar ist; das ist, es muß = 30 seyn. Diß gibt nun folgendes Schema:

	30	0
3 - - - - - -	0	30
2 - - - - - - -	30	90.
9 - - - - - - -	60	210.
1 - - - - - - -	570	1980.
15 - - - - - -	630	2190.
2:3 - - - -	10020	34830.
21 - - - - -	7310	25410.
1:2 - - - -	163530	568440.
27 - - - - -	89075	309630.
25 - - - -	2568555	8928450.
	1116497	3881010.

Schafft man nun die in Zähler und Nenner, wegen Hebung der Brüche bei den Quotienten eingeführten gemeinschaftlichen Factoren hinweg; so ist also die Reihe der gegen Log. $\frac{3}{4}$ convergirenden Brüche $\frac{30}{90}$, $\frac{60}{210}$ &c. diese:

$\frac{1}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{19}{66}$; $\frac{21}{73}$; $\frac{334}{1161}$; $\frac{731}{2541}$; $\frac{1817}{6316}$;

$\frac{17815}{61926}$; $\frac{171273}{595230}$; $\frac{1116497}{3881010}$; u. s. w.

Von diesen ist der leztere schon so genau, daß, wenn man ihn in einen Decimalbruch verwandelt, man erhält:

Log. $\frac{4}{3}$ = 0, 28768270, und mithin

Log. 4 = 0, 28768270 + Log. 3.

Es ist aber Log. 3 = 1, 09861228, folglich

Log. 4 = 1, 38629498.

Nach den Tabellen ist aber

Log. 4 = 1, 38629436.

Und demnach der Unterschied nur 0, 00000062---

Diß ist nun der hyperbolische Logarithmus von 4, bekanntlich aber erhält man den gewöhnlichen der Tafel für eben diese Zahl 4, wenn man jenen, den hyperbolischen, mit 0, 434294481 9 . . . multiplicirt. Will man so fort aus dem bekannten Log. von 4, den für die Zahl 5 berechnen, so setze man $x = \frac{1}{4}$. Dadurch erhält man Log. $1\frac{1}{4}$ oder Log. $\frac{5}{4}$, mithin auch Log. 5. Eben so ergibt sich aus $x = \frac{1}{5}$ der Log. $\frac{6}{5}$ und also Log. 6. u. s. w.

I. An=

I. Anmerkung.

§. 46. Wir haben oben angenommen, x müsse eine solche Zahl seyn, daß der Logarithmus von $1+x$ nicht größer als die Einheit sey. Diese Bedingung, die sich auf §. 42. beziehet, ist nicht wesentlich. Wenn man nehmlich in der Reihe

$$\text{Log.}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots \&c.$$

für x ganze Werthe, die > 1 sind, annimmt; so wird diese Reihe zwar divergirend, und so wie sie hier ist, läßt sie sich zu Berechnung dieser Fälle nicht brauchen. Allein der im vorhergehenden aus ihr abgeleitete Werth

$$\text{Log.}\,(1+x) = \cfrac{1}{1:x + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:x + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:x + \&c.}}}}}$$

wird dennoch auch für diesen Fall brauchbar bleiben, obgleich die Näherung für ganze x kleiner ist, als für gebrochene Werthe, wie theils der Anblik dieser Formel, theils eine leichte damit angestellte Rechnung zeigt.

Uebrigens ist noch bemerkenswerth, daß obgleich für solche ganze x, die > 1 sind, die Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c.$ divergirend wird, der aus letzterer abgeleitete continuirliche Bruch, der den Werth dieser Reihe, oder von Log. $(1+x)$ ausdrückt, dennoch durch eine gegen den wahren Werth convergirende Reihe gefunden werden kann.

II. An-

II. Anmerkung.

§. 47. Hätte man sich, anstatt der ersten Auflösung, der zweiten bedient, so hätte man durch die Formeln §. 43. folgende Quotienten gefunden:

$$x, \ -\frac{2}{x^2}, \ -\frac{3x}{4}, \ -\frac{48}{x^2}, \ \&c.$$

Daher auch

$$\text{Log.}(1+x) = x + \cfrac{1}{-2:x^2 + \cfrac{1}{-3x:4 + \cfrac{1}{-48:x^2 + \&c.}}}$$

deren verneinte Glieder, nach §. 17. in bejahte verwandelt werden können, wobei wir uns aber nicht aufhalten.

II. Beispiel.

§. 48. Den Ausdruck:

$$\text{Log.}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} \ldots$$

in einen continuirlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung.

Wenn man den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor 2 bis zu Ende der Auflösung beiseit sezt, oder wenn man $\frac{1}{2}$ Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ in einen continuirlichen

Bruch

Bruch verwandelt, und dabei sich abermal der ersten Auflösung bedienet, so ist

$$a = \frac{x}{1},\ b = \frac{x^3}{3},\ c = \frac{x^5}{5},\ d = \frac{x^7}{7},\ e = \frac{x^9}{9},\ f = \frac{x^{11}}{11}\ \&c.$$

also $A = \frac{b^2 - ac}{b} = -\frac{4x^3}{3.5}$; $B = \frac{bc - ad}{b} = -\frac{8x^5}{5.7}$;

$$C = \frac{bd - ae}{b} = -\frac{12\,x^7}{7.9}\ \&c.$$

$A^I = \frac{Bb - Ac}{Aa} = \frac{3x^4}{5.7}$; $B^I = \frac{bC - Ad}{Aa} = \frac{6x^6}{7.9}$;

$$C^I = \frac{bD - Ae}{Aa} = \frac{9\,x^8}{9.11}.$$

Sezt man diese Rechnung gehörig fort; so findet sich folgende Reihe von Quotienten:

$$+\frac{1}{x},\ -\frac{3}{1.x}\ +\frac{1.5}{4x},\ -\frac{4.7}{9.1x},\ +\frac{9.9}{16.4x},\ -\frac{4.16.11}{25.9x},$$

$$+\frac{25.9.13}{36.4.16x},\ -\frac{36.4.16.15}{49.25.9x},\ +\frac{49.25.9.17}{64.36.4.16x},\ \&c.$$

Das Gesez, das diese Quotienten beobachten, ist sehr einfach. In den Nennern kommen nehmlich die Quadrate der natürlichen Zahlen 1, 4, 16, 25, u. s. w. der Ordnung nach vor, und jedes derselben ist in den Nenner des vorletzten Bruchs multiplicirt. In den Zählern beobachten die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 13 u. s. w. dieselbe Ordnung, und jede derselben ist in den Nenner des unmittelbar vor ihr hergehenden Quotienten multiplicirt. Ueberdiß sind diese Quotienten abwechs-

lungs-

lungsweise bejaht und verneint. Aus ihnen ist es nach §. 8. 9. 10. und §. 44. Nro. 3. leicht, die gegen Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ convergirenden continuirlichen Brüche zu entwickeln.

III. Beispiel.

§. 49. Man soll die bekannte Leibnizische Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \&c.$$

welche, für den Halbmesser 1, den vierten Theil des halben Umfangs eines Cirkels ausdrückt, in einen continuirlichen Bruch verwandeln.

Nach angestellter Vergleichung dieser Reihe mit der unsrigen, vermöge welcher

$$a=1,\ b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{1}{5},\ d=-\frac{1}{7},\ e=\frac{1}{9},\ f=-\frac{1}{11}\ \text{u. s. w.}$$

ist, findet sich vermittelst der ersten Auflösung folgende Reihe von Quotienten:

$$\frac{3}{1},\ \frac{1.5}{4},\ \frac{4.7}{9.1},\ \frac{9.9}{16.4},\ \frac{64.11}{25.9},\ \frac{25.9.13}{36.64},$$

$\frac{36.64.15}{49.225}$, u. s. w. deren Gesez, die Zeichen abgerechnet, eben dasselbe des vorhergehenden §. ist und seyn muß.

Daher ist

$$\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5:4 + \cfrac{1}{28:9 + \cfrac{1}{81:64 + \cfrac{1}{704:225 + \cfrac{1}{2925:2304 + \cfrac{1}{\&c.}}}}}}}}$$

IV. Beispiel.

§. 50. Die Reihe:

$$\sqrt[5]{(\alpha^5 + \beta)} = \alpha + \frac{\beta}{5\alpha^4} - \frac{2\beta^2}{25\alpha^9} + \frac{6\beta^3}{125\alpha^{14}} - \frac{21\beta^4}{625\alpha^{19}} + \frac{399\beta^5}{25^3\alpha^{24}} - \&c.$$

in einen continuirlichen Bruch zu verwandeln.

Wenn man α und β als ganze Zahlen annimmt, und deshalb die zweite Auflösung hier anwendet, so ergeben sich folgende Werthe:

$$a = \alpha;\ b = \frac{\beta}{5\alpha^4};\ c = -\frac{2\beta^2}{25\alpha^9};\ d = \frac{6\beta^3}{125\alpha^{14}};$$

$$e = -\frac{21\beta^4}{625\alpha^{19}};\ f = \frac{399\beta^5}{25^3\alpha^{24}}\ \&c.$$ Daher

$$A = -\frac{\beta^2}{25\alpha^9};\ B = \frac{9\beta^3}{2.125\alpha^{14}};\ C = -\frac{9.21\beta^4}{2.5.625\alpha^{19}}\ \&c.$$

$$A^{I} = -\frac{3\beta^2}{25\alpha^{10}};\quad B^{I} = \frac{84\beta^3}{625\alpha^{15}},\quad \&c.$$

$$A^{II} = -\frac{11\beta^3}{2.625\alpha^{14}}\quad \&c.$$

Folglich sind die Quotienten a, $1:b$; $-b^2:c$; $c:Ab$; $A:A^{I}$; $A^{I}:A^{II}$ &c. folgende:

$$\alpha;\quad \frac{5\alpha^4}{\beta};\quad \frac{\alpha}{2};\quad \frac{10\alpha^4}{\beta},\quad \frac{\alpha}{3};\quad 5\cdot\frac{30\alpha^4}{11\beta}\quad \&c.$$

und mithin

$$\sqrt[5]{(\alpha^5+\beta)} = \alpha + \cfrac{1}{5\alpha^4:\beta + \cfrac{1}{\alpha:2 + \cfrac{1}{10\alpha^4:\beta + \cfrac{1}{\alpha:3 + \cfrac{1}{5\cdot30\alpha^4:11\beta + \&c.}}}}}$$

I. Anmerkung.

§. 51. Diese Formel ist sehr geschickt, um aus einer gegebenen Zahl die fünfte Wurzel auszuziehen. Gesezt nehmlich, man verlange die fünfte Wurzel von 245, so setze man $245 = 3^5 + 2$. und nehme also $\alpha = 3$, und $\beta = 2$, so ist diese Wurzel

$$= 3 + \cfrac{1}{405:2 + \cfrac{1}{3:2 + \cfrac{1}{810:2 + \cfrac{1}{3:3 + \cfrac{1}{12150:22. + \&c.}}}}}$$

oder:

oder:

$$= 3 + \cfrac{1}{405:2 + \cfrac{1}{3:2 + \cfrac{1}{405 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6075:11 + \&c.}}}}}$$

Aus diesen Quotienten mache man, nach §. 44. Nro. 3. das Schema:

	44	0
3 - - - -	0	44
$\frac{405}{2}$ —	44	132
$\frac{3}{2}$ —	8910	26774
405 —	13409	40293
1 —	5439555	16345439
$\frac{6075}{11}$ —	5452964	16385732
&c.	3016962855	9065738339
	&c.	&c.

Von diesen sich dem Werthe $\sqrt[5]{245}$ immer mehr nähernden Brüchen ist der lezte

$$\frac{9065738339}{3016962855} = 3,004922$$

bereits eben so genau, als derjenige, den man vermittelst der Logarithmischen Tabellen erhält. Ist es nöthig, die Genauigkeit noch weiter zu treiben, so darf man der Reihe der Quotienten nur noch einige mehr

beifügen, und die daraus entstehenden Brüche berechnen.

II. Anmerkung.

§. 52. Diese Methode, die Wurzeln auszuziehen, ist der fünften Wurzel nicht allein eigen, sondern kann, vermittelst des binomischen Lehrsatzes, dem sie ihren Ursprung verdankt, auf jede andere angewendet werden. — Wenn man nehmlich, nach diesem Lehrsatze, den Ausdruk $\sqrt[m]{(\alpha^m + \beta)}$ in eine Reihe verwandelt, und die sich ergebenden Glieder den Größen a, b, c, d, &c. gleich setzt; so erhält man durch die zweite obige Auflösung folgende Quotienten:

$$\alpha,\ \frac{1.m\alpha^{m-1}}{\beta},\ \frac{2\alpha}{m-1},\ \frac{3m(m-1)\alpha^{m-1}}{(m+1)\beta};\ \frac{2(m+1)\alpha}{(m-1)(2m-1)};$$

$$\frac{5m(m-1)(2m-1)\alpha^{m-1}}{(m+1)(2m+1)\beta};$$

$$\frac{2(m+1)(2m+1)\alpha}{(m-1)(2m-1)(2m-3)};\ \&c.$$

wo das Gesez des Fortgangs deutlich erhellet, wenn man die ersten, dritten, fünften ꝛc. und dann wieder die zweiten, vierten, sechsten, unter sich vergleicht.

§. 53. Die bisher angeführten Beispiele werden hinreichend seyn, den Geist und die Brauchbarkeit der Methode, Reihen in continuirliche Brüche zu verwandeln, zu zeigen. Für diejenigen, die sich ferner hierinn üben wollen, fügen wir noch folgende Reihen bei.

1) Arcus

1) $\text{Arcus Tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \&c.$

2) $\text{Sin.}\, x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.$

3) $\text{Cos.}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \&c.$

4) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \&c.$

5) $x = \frac{1}{M} + \frac{1}{MN} + \frac{1}{MNP} + \frac{1}{MNPQ} + \&c.$

6) $x = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m+3n} + \frac{1}{m+4n} + \&c.$

7) $x = \frac{A}{\alpha} + \frac{ABy}{\alpha Mz} + \frac{ABCy^2}{\alpha MNz^2} + \frac{ABCDy^3}{\alpha MNOz^3} + \&c.$

§. 54. Man kann die oben gegebenen beiden Auflösungen auch umkehren, und jeden gegebenen continuirlichen Bruch in eine Reihe verwandeln. Hiebei ist weiter nichts zu thun, als zu zeigen, wie aus den Quotienten des Bruchs die Glieder a, b, c, d, &c. hergestellt werden können. Als Beispiel nehmen wir den ersten Fall obiger Auflösung §. 42. vor, da nehmlich der continuirliche Bruch kleiner als 1. ist. Es seyen also die Quotienten desselben

μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, μ^{IV} &c. so haben wir

1) $\frac{1}{a} = \mu$, also $a = \frac{1}{\mu}$.

2) $-\frac{a^2}{b} = \mu^{I}$, mithin $b = -\frac{a^2}{\mu^{I}} = -\frac{1}{\mu^2 \mu^{I}}$.

3) $-\frac{b}{Aa} = \mu^{II}$, daher $A = -\frac{b}{a\mu^{II}}$.

Es ist aber $A = \frac{b^2 - ac}{b}$

folglich auch $\frac{b^2 - ac}{b} = -\frac{b}{a\mu^{II}}$, und hieraus ergibt

sich nun $c = \frac{b^2}{a}\left(1 + \frac{1}{a\mu^{II}}\right)$, wo für a und b die

bereits gefundenen Werthe gesezt werden können.

4) $\frac{A}{A^{I}} = \mu^{III}$, also $A^{I} = \frac{A}{\mu^{III}}$. Nun ist auch

$A^{I} = \frac{bB - Ac}{Aa}$, und $B = \frac{bc - ad}{b}$, daher ist

$\frac{bc - Ac - Ad}{Aa} = \frac{A}{\mu^{III}}$, und hieraus folgt

$d = \frac{(b - A)\, c\mu^{II} - A^2 a}{a\mu^{III}}$, u. s. w.

D.) An=

D.) Anwendung der Lehre von den continuirlichen Brüchen auf die Auflösung in Zahlen der Gleichungen von jedem Grade, durch Näherung.

§. 55. Herr la Grange, dem die Analysis so viele wichtige Entdeckungen verdankt, hat durch Hilfe der continuirlichen Brüche die Gleichungen von jedem Grade in Zahlen auflösen gelehrt; und dabei ist seine Auflösung so einfach und zierlich, daß in Absicht auf ihre Vollständigkeit und Brauchbarkeit nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Da nun dieselbe einzig und allein auf die Lehre von den continuirlichen Brüchen gebaut, und dabei noch nicht so allgemein bekannt ist, als sie es zu seyn verdienet, so dürfte es nicht überflüßig seyn, hier mit einigen Erläuterungen und Anwendungen, in folgenden Absätzen vorzutragen.

1) Wenn $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots . k = 0$ die aufzulösende Gleichung ist, in welcher die Coefficienten a, b, c, &c. bekannte, ganze, bejahte oder verneinte Zahlen vorstellen, so wird entweder angenommen, daß keiner der Werthe von x rational sey, oder es wird, wenn gleichwohl einer oder mehrere rationale Werthe vorhanden sind, von denselben abstrahirt. Eben so muß auch der Fall beiseite gesetzt werden, wenn die aufzulösende Gleichung mehrere gleiche Wurzeln hat. In diesen beiden Fällen ist nehmlich die gegebene Gleichung durch einen oder mehrere rationale Factoren theilbar, und kann sodann auf einen niedern Grad, und die so eben vorausgesezte Form gebracht werden.

2) Da

2) Da die vorgegebene Gleichung vom nten Grade ist, so hat sie n Wurzeln oder Werthe von x, von denen einige irrational und wirklich, die andern aber maginair oder eingebildet seyn können. Auch von der leztern abstrahiren wir. Wir betrachten daher in dem folgenden nur diejenigen Werthe von x, oder diejenigen Wurzeln der Gleichung, die wirklich und dabei irrational sind.

3) Jede dieser irrationalen Wurzeln ist zwischen zweien, um eine Einheit verschiedenen ganzen Zahlen enthalten, welche demnach die ersten oder weitesten Gränzen derselben vorstellen, und welche entweder bejaht oder verneint sind.

Diese Gränzen nehmen wir ebenfalls als bekannt an, und setzen also voraus, daß der Unterschied zwischen dem unbekannten und dem wahren Werthe von x keine Einheit betrage. *) Ueberdiß ist noch zu bemerken, daß obschon die vorgegebene Gleichung verschiedene Wurzeln habe, wir doch bei den folgenden Untersuchungen nur von einer sprechen, weil diese auf jede derselben passen.

4) Ohne demnach in ein Detail der Gränzen der Wurzeln zu gehen, ist folgendes immer richtig, und anwendbar; welche zwei zunächst auf einander folgende

*) Die Auseinandersetzung der Methode die Gränzen der Wurzeln zu bestimmmen, gehört nicht hieher, und diese wird demnach als bekannt vorausgesezt. Wer sie näher kennen lernen will, der sehe die Révolution des équations numériqnes de tous les dégrès von La Grange, §. 12. &c. und die Note IV.

de ganze bejahte oder verneinte Zahlen für x in die gegebene Gleichung gesezt, diese leztere dergestalt verändert, daß vermöge der ersten Annahme das Resultat aller ihrer Glieder eine bejahte Zahl, und sodann vermöge der zweiten eine verneinte Zahl wird, diese zwei diß bewirkende Werthe von x sind die Gränzen des wahren Werths, von denen so eben die Rede war: denn das Resultat o liegt zwischen dem bejahten und verneinten.

5) Es sey α die kleinere der auf diese, oder eine andere Art bestimmten Gränzen, so setze man

$x = \alpha + \frac{1}{x^I}$, wenn x bejaht ist, oder nehme man

es $= -\alpha - \frac{1}{x^I}$, wenn dieser Werth verneint seyn

muß. In beiden Fällen ist man überzeugt, daß x^I nicht verneint seyn kann, (weil sonst $\pm\alpha$ nicht die kleinste Gränze in ganzen Zahlen wäre,) und daß überdiß $\frac{1}{x^I}$ ein ächter Bruch, und mithin x^I größer als 1

seyn muß. Diesen Werth von x setze man in die vorgegebene Gleichung und ordne hierauf alle Glieder nach den Potenzen von x^I; so ergibt sich die erste Verwandlung.

$$a^I x^{In} + b^I x^{In-1} + c^I x^{In-2} \dots + k^I = o,$$

von eben dem Grade, wie die vorige Gleichung, und wo die Coefficienten a^I, b^I, c^I, &c. aus Analogie mit den vorhergehenden also bezeichnet, bekannte ganze Zahlen sind.

6) Von

6) Von dieser ersten Verwandlung weiß man, nach Nro. 5. daß x^{I} bejaht und größer, als die Einheit seyn muß. Man bestimme daher abermal, die Gränzen von x^{I} in ganzen Zahlen, β sey die kleinere derselben. Und nun setze man $x^{I} = \beta + \frac{1}{x^{II}}$. Dieser Werth in die erste Verwandlung substituirt, gibt die zweite Verwandlung:

$$a^{II} x^{II n} + b^{II} x^{II n-1} + c^{II} x^{II n-2} \ldots\ldots + k^{II} = 0,$$

mit welchen sich ähnliche Betrachtungen anstellen lassen.

Daher hat man

7) nach öfters wiederhohlten immer ähnlichen Substitutionen

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \&c.}}}$$

aus welchem continuirlichen Bruche sich nach §. 8. oder 9. die Reihe der gegen x convergirenden Brüche berechnen läßt.

§. 56. Diß ist eine Skizze der Methode des Herrn La Grange. Es hat aber dieser berühmte Schriftsteller dieselbe, um ihr vollends den lezten Grad von Zierlichkeit zu geben, mit mehreren bedeutenden Abkürzungen ausgeschmükt, die so beschaffen sind, daß es schwer ist, ihrer Vollständigkeit noch etwas zuzusetzen.

Die erste dieser Abkürzungen lehrt die verschiedenen Verwandlungen aus der gegebenen Gleichung nach einem leichten Gesetze, ohne die mühsamen Substitutionen Nro. 5. und 6. herleiten.

Die zweite lehrt, wenn einige Anfangswerthe für x gefunden sind, in jeder Verwandlung die Gränzen von x^{I}, x^{II}, x^{III} &c vermittelst einer ganz einfachen Formel, auf eine directe Weise angeben, durch Proben, wie Nro. 4. oder die andern Methoden, die Gränzen zu bestimmen, erfordern.

Die dritte endlich zeigt, wie man, wenn die Näherung einmal einen gewissen Grad von Vollkommenheit erreicht hat, die Gränzen des Werths der gesuchten Wurzel x durch bloses dividiren noch um ein beträchtliches genauer bestimmen kann.

Wir nehmen diese drei Abkürzungen der Ordnung nach vor.

§. 57. Methode, aus der gegebenen Gleichung:

$$ax^{n} + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots + k = 0,$$

die durch die Voraussetzungen

$$x = \alpha + \frac{1}{x^{I}},\quad x^{I} = \beta + \frac{1}{x^{II}},\quad x^{II} = \gamma + \frac{1}{x^{III}},\ \&c.$$

entstehenden Verwandlungen derselben

$$a^{I}x^{In} + b^{I}x^{In-1} + c^{I}x^{In-2} \ldots + k^{I} = 0,$$

$$a^{II}x^{IIn} + b^{II}x^{IIn-1} + c^{II}x^{IIn-2} \ldots + k = 0\ \&c.$$

herzuleiten.

Man

Man setze in die Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots\ldots + k = 0,$$

für x den Werth $\alpha + \frac{1}{x^1}$, so verwandelt sie sich in

$$a\left(\alpha + \frac{1}{x^1}\right)^n + b\left(\alpha + \frac{1}{x^1}\right)^{n-1}$$

$$+ c\left(\alpha + \frac{1}{x^1}\right)^{n-2} \ldots\ldots k = 0,$$

oder in:

$$a\left(\alpha^n + n.\frac{\alpha^{n-1}}{x^1} + n\frac{(n-1)}{1.2.}\frac{\alpha^{n-2}}{x^{1}2} + n\frac{(n-1)(n-2).}{1.2.3.}\right.$$

$$\left.\frac{\alpha^{n-3}}{x^{1}3} + \&c.\right)$$

$$+ b\left(\alpha^{n-1} + (n-1)\frac{\alpha^{n-2}}{x^1} + \frac{(n-1)(n-2).}{1.\ 2.}\frac{\alpha^{n-3}}{x^{1}2} + \&c.\right)$$

$$+ c\left(\alpha^{n-2} + (n-2)\frac{\alpha^{n-3}}{x^1} + \frac{(n-2)\ (n-3).}{1.\ 2.}\right.$$

$$\left.\frac{a^{n-4}}{x^{1}2} + \&c.\right) \ldots\ldots k = 0.$$

Bringt man hier alle Glieder, die eben dieselbe Potenz von x enthalten, in eine Summe, und sezt der Kürze wegen

$$a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + d\alpha^{n-3} + e\alpha^{n-4} \ldots\ldots + k = a^1,$$

$$an\alpha^{n-1} + b(n-1)\alpha^{n-2} + c(n-2)\alpha^{n-3}$$

$$+ d(n-3)\alpha^{n-4} \ldots\ldots = b^1,$$

$$\frac{an(n-1)}{1.\,2.}\alpha^{n-2} + b\frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.}\alpha^{n-3} + c\frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2.}$$

$$\alpha^{n-4} \ldots\ldots = c^{1},$$

$$\frac{an(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}\alpha^{n-3} + b\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.}\alpha^{n-4}$$

$$+ c\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\,2.\,3.}\alpha^{n-5} \ldots\ldots = d^{1}\ \&c.$$

so ist

$$a^{1} + \frac{b^{1}}{x^{1}} + \frac{c^{1}}{x^{12}} + \frac{d^{1}}{x^{13}} + \frac{e^{1}}{x^{14}} \ldots\ldots = 0.$$

oder:

Wenn man mit der höchsten Potenz der Nenner, nehmlich x^{1n} multiplicirt,

$$a^{1}x^{1n} + b^{1}x^{1n-1} + c^{1}x^{1n-2} + d^{1}x^{1n-3} \ldots\ldots + k^{1} = 0.$$

Hier ist zu bemerken, daß das lezte Glied k^{1} nichts anders, als a selbst sey. Denn es ist dasselbe

$$\frac{an(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots n-m.}{1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\ldots\,(m+1)}\frac{\alpha^{n-(m+1)}}{x^{1m+1}}$$

$$+\frac{b(n-1)(n-2)\ldots\ldots n-(m+1).}{1.\,2\,\ldots\ldots\,(m+1)}\frac{\alpha^{n-(m+2)}}{x^{1m+1}} + \&c.$$

Da es nun das lezte seyn soll, so muß der Exponent von α nothwendig $= 0$ seyn. Es wird also $n = m + 1$, und folglich verschwinden alle Glieder desselben, in welchen der Zähler den Factor $n - (m + 1)$ hat, das heißt, alle Glieder vom zweiten Gliede

b (n-1)

$$\frac{b\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\,n-(m+1).}{1.\;\;2.\;\;\ldots\ldots\;\;(m+1)}\;\frac{\alpha^{n-(m+2)}}{x^{m+1}}$$

an, und es ist

$$k^{1} = \frac{a.n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\ldots\,3.\;2.\;1.}{1.\;2.\;3.\;\ldots\ldots\ldots\;(n-2)\,(n-1).\;n} = a.$$

Um daher aus der aufzulösenden Gleichung ihre erste Verwandlung herzuleiten, beobachte man folgendes Verfahren.

Die aufzulösende Gleichung sey

$$ax^{n} + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} \ldots\ldots + k = o.$$

Aus ihr bilde man die Reihen

A) $ax^{n} + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-2} \ldots\ldots + k$

B) $anx^{n-1} + b\,(n-1)\,x^{n-2} + c\,(n-2)\,x^{n-3}$

$+ d\,(n-3)\,x^{n-4} +$ &c.

C) $\frac{an(n-1)}{1.\;2.}x^{n-2} + \frac{b(n-1)\,(n-2)}{1.\;2.}x^{n-3} + \frac{c(n-2)\,(n-3)}{1.\;2.}x^{n-4}$

$+ \frac{d\,(n-3)\,(n-4)}{1.\;2.}\,x^{n-5} +$ &c.

D) $\frac{an(n-1)\,(n-2)}{1.\;2.\;3.}\,x^{n-3} + \frac{b\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\;2.\;3.}\,x^{n-4}$

$+ \frac{c\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.\;2.\;3.}\,x^{n-5} +$ &c.

&c.

setze in jeder dieser Reihen anstatt x seinen nächsten Werth in ganzen Zahlen α, heiße alsdenn das, was

aus

aus A, B, C, D, &c. wird a^I, b^I, c^I, d^I, &c. so hat man die erste Verwandlung

$$a^I x^{In} + b^I x^{In-1} + c^I x^{In-2} + d^I x^{In-3} \ldots + a = 0.$$

Da nun jede Verwandlung aus ihrer vorhergehenden entstehet, wie diese aus ihrer vorhergehenden entstanden ist; so hat man, um die zweite Verwandlung aus der ersten herzuleiten, weiter nichts nöthig, als in den obigen Formeln die Werthe α, a, b, c, d, &c. mit den Werthen α^I (welches α^I nach der Analogie mit α den kleinsten Werth von x^I in ganzen Zahlen bedeutet) a, b, c, d, &c. zu verwechseln, und aus der ersten Verwandlung

$$a^I x^{In} + b^I x^{In-1} + c^I x^{In-1} \ldots + a = 0$$

die Werthe

$$\left.\begin{array}{l}
a^{II} = a^I x^{In} + b^I x^{In-1} + c^I x^{In-2} \\
\quad + d^I x^{In-2} \ldots + a \\
b^{II} = a^I n (x^I)^{n-1} + b^I (n-1) x^{In-2} \\
\quad + c (n-2) x^{In-3} + \&c. \\
c^{II} = \dfrac{a^I n (n-1)}{1.\ 2.} x^{In-2} \\
\quad + \dfrac{b^I (n-1)(n-2)}{1.\ 2.} x^{In-3} + \&c. \\
d^{II} = \dfrac{a^I n (n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.} x^{In-3} \\
\quad + \dfrac{b^I (n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.} x^{In-4} + \&c. \\
\&c.
\end{array}\right\} \text{für } x^I = \alpha^I$$

herzu-

herzuleiten, so ist die zweite Verwandlung

$a^{II}x^{IIn} + b^{II}x^{IIn-1} + c^{II}x^{IIn-2} + d^{II}x^{IIn-3} \ldots\ldots + a = 0.$

Auf ähnliche Art findet sich aus der zweiten Verwandlung die dritte, und aus dieser die vierte, und so weiter.

§. 58. Wenn man die Differenzialrechnung hier anwenden will, so kann das unmittelbar vorhergehende noch kürzer und zierlicher also vorgestellt werden:

Es sey nehmlich

$\varphi = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} \ldots\ldots + k$

entweder die erste, aufzulösende Gleichung, oder auch eine ihrer Verwandlungen, in welcher sowohl von den Coefficienten als von x die Zeichen, die diese Größen von den Analogen der vorhergehenden Verwandlung unterscheiden, hinweg gelassen worden sind, so wird dieser Werth von φ der Coefficient des ersten Glieds der nächsten Verwandlung, wenn man für x seinen nächsten Werth α in ganzen Zahlen sezt, wie bereits gezeigt worden.

Ferner ist, wenn man differenzirt,

$\frac{d\varphi}{dx} = anx^{n-1} + b(n-1)x^{n-1} + c(n-2)x^{n-3} \ldots\ldots$

und wenn man auch hier für x den eben gedachten nächsten Werth α sezt, so ist dieser Ausdruk der Coefficient des zweiten Glieds der nächsten Verwandlung, den wir oben b^1 nannten.

Ferner

Ferner ist, wenn man abermals differenzirt,

$$\frac{d^2\varphi}{1.2.dx^2} = \frac{an(n-1)x^{n-2}}{1.\,2.} + \frac{b(n-1)(n-2)x^{n-3}}{1.\,2.}$$

$$+ \frac{c(n-2)(n-3)x^{n-4}}{1.\,2.} + \&c.$$

welcher Werth, wenn anstatt x abermal der vorige nächste Werth α gesezt wird, dem Coeffcienten des dritten Glieds, den wir vorher c^{I} nannten, gleich ist.

Eben so gibt

$\frac{d^3\varphi}{1.2.3.dx^3}$. den Coefficienten des vierten

$\frac{d^4\varphi}{1.2.3.4.\,dx^4}$ den des fünften Glieds, u. s. w.

Alles kommt daher darauf an, daß man in jeder Verwandlung den Werth α für das in ihr befindliche x, (denn von nun an wollen wir diese x nicht mehr durch besondere Zeichen unterscheiden) nach §. 55. Nro. 4. bestimme, um sodann die Coefficienten a, b, c, d, e, &c. der nächsten Verwandlung aus

$$\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d^2\varphi}{1.2.dx^2}, \quad \&c.$$

herzuleiten.

Zur Erläuterung des bisherigen dienet folgendes Beispiel.

§. 59. Man soll die Gleichung
$x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0.$ auflösen.

Da hier $x = 1$ ein wirklicher Werth der gegebenen Gleichung ist, so abstrahiren wir (nach §. 55. Nro. 1.) von demselben, und untersuchen nur die beiden übrigen.

Nach einer leichten Probe findet sich nun für $x = 2$ das Resultat -1, und für $x = 3$ das Resultat $+8$. Daher ist (§. 55. Nro. 4.) eine Wurzel der gegebenen Gleichung sicher zwischen 2 und 3.

Ferner ist für $x = -2$ das Resultat $+3$, und für $x = -3$, das Resultat -16. Demnach ist die andere Wurzel nothwendig zwischen -2 und -3.

Untersuchung der Wurzel zwischen 2 und 3.

Man hat also

$$\phi = x^3 - x^2 - 5x + 5.$$

Dieser Werth,

Ferner ist: für $x = \alpha = 2$ verwandelt sich in: -1.

$$\frac{d\phi}{dx} = 3x^2 - 2x - 5. \quad \ldots\ldots \quad +3.$$

$$\frac{d^2\phi}{1.2.dx^2} = 3x - 1. \quad \ldots\ldots \quad +5.$$

und

$$\frac{d^3\phi}{1.2.3.dx^3} = 1. \quad \ldots\ldots \quad +1.$$

Es sind also die Coefficienten der ersten Verwandlung der Ordnung nach -1, $+3$, $+5$, $+1$, und daher ist diese Verwandlung selbst

$$-x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0.$$

W.

Wo man schon weiß, daß das x dieser Verwandlung mit dem vorigen nicht zu verwechseln ist.

Es kommt nun darauf an, denjenigen bejahten (§. 55. Nro. 4.) Werth für x in ganzen Zahlen zu bestimmen, der als die nächste Wurzel dieser Gleichung angesehen werden kann, und den wir bisher α nannten. Eine leichte Probe zeigt, daß $x = \alpha = 4$ genommen werden muß. Demnach geht die Rechnung also fort:

$$\varphi = - x^3 \; 3x^2 + 5x + 1.$$

sodann ist: Dieser Werth, für $x = \alpha = 4$ verwandelt sich in $+ 5$.

$$\frac{d\varphi}{dx} = - 3x^2 + 6x + 5. \quad \ldots \quad - 19.$$

$$\frac{d^2\varphi}{2(dx)^2} = - 3x + 3. \quad \ldots \quad - 9.$$

$$\frac{d^3\varphi}{2.3.dx^3} = - 1. \quad \ldots \quad - 1.$$

Also ist die zweite Verwandlung

$$5x^3 - 19x^2 - 9x - 1 = 0.$$

Hier ist der nächste bejahte Werth von x in ganzen Zahlen, oder das neue α abermals 4. Daher geht die Rechnung also fort:

$$\varphi = 5x^3 - 19x^2 - 9x - 1.$$

Dieser Werth, für $x = \alpha = 4$, verwandelt sich in 21.

$$\frac{d\varphi}{dx} = 15x^2 - 38x - 9. \quad \ldots \quad + 79.$$

$$\frac{d^2\varphi}{2dx^2} = 15x - 19. \quad \ldots \quad + 41.$$

$$\frac{d^3\phi}{2.3.dx^3} = 5: \;\; : : : : : : : : \;\; +5.$$

Demnach ist die dritte Verwandlung

$$-21x^3 + 79x^2 + 41x + 5 = 0.$$

Auch bei dieser ist der nächste Werth von x oder $\alpha = 4$. Hieraus ergibt sich

$$\phi = -21x^3 + 79x^2 + 41x + 5.$$

Dieser Werth,

für $x = \alpha = 4$, wird $= +89$.

$$\frac{d\phi}{dx} = -3.21x^2 + 2.79x + 41. \; - - = -335.$$

$$\frac{d^2\phi}{2dx^2} = -3.21x + 79. \; - - - - = -173.$$

$$\frac{d^3\phi}{2.3.dx^3} = -21. \; - - - - - - = -21.$$

Daher ist die vierte Verwandlung

$$89x^3 - 335x^2 - 173x - 21 = 0.$$

und so kann man die Rechnung so weit fortsetzen, als man für nöthig erachtet. Sammelt man zulezt alle Werthe von den x der verschiedenen Verwandlungen, so ist dasjenige x, das die gegebene Gleichung auflöset $= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \&c.}}}$

Unter=

Untersuchung der Wurzel zwischen — 2 und — 3.

§. 60. Die Untersuchung dieses Falls ist der des vorigen ähnlich: Nur muß, da hier $x = -2 - \frac{1}{x^{\mathrm{I}}}$ ist, und dieser Werth in §. 57. bejaht angenommen wurde, die erste Verwandlung unmittelbar aus der aufzulösenden Gleichung

$$x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0.$$

abgeleitet werden. Nimmt man nehmlich hier für x den so eben angeführten Werth, und ordnet alles nach den Potenzen von x^{I}, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$3x^{\mathrm{I}3} - 11x^{\mathrm{I}2} - 7x^{\mathrm{I}} - 1 = 0.$$

Da nun hier so wohl als in allen übrigen abgeleiteten Verwandlungen, nach §. 55. Nro. 5.) x^{I} bejaht seyn muß, so geht von hier an die Rechnung wie im vorigen Falle fort, und es wird seyn

$$x = -2 - \cfrac{1}{x^{\mathrm{I}} + \cfrac{1}{x^{\mathrm{II}} + \cfrac{1}{x^{\mathrm{III}} + \cfrac{1}{x^{\mathrm{IV}} + \cfrac{1}{x^{\mathrm{V}} + \&c.}}}}}$$

oder $-(x + 2) = \cfrac{1}{x^{\mathrm{I}} + \cfrac{1}{x^{\mathrm{II}} + \cfrac{1}{x^{\mathrm{III}} + \&c.}}}$

wo=

wodurch die verneinten Brüche, ohne daß es nöthig ist, sie nach §. 17. zu behandeln, gänzlich verschwinden.

Uebrigens bemerke ich noch für diejenigen, die die Differenzialrechnung entweder nicht verstehen, oder sie hier nicht gerne in der Elementar-Algebra angebracht sehen, daß die §. 57. gegebenen Formeln eben so allgemein, und bei einer kleinen Uebung bei wirklichen Beispielen eben so bequem sind, als die durch die Differenzialrechnung gegebenen.

§. 61. Methode, welche lehrt, wie man, wenn einige Anfangswerthe der zu suchenden Wurzel bekannt sind, die Gränzen von x^{I}, x^{II}, x^{II}, &c. in den folgenden Verwandlungen, ohne Probiren, auf eine directe Art finden könne.

Es ist, wie die bisherigen Beispiele zeigen, mühsam, in jeder der nach der so eben erklärten Methode abgeleiteten Verwandlungen die Gränzen von x zu finden, und das um so mehr, als durch fortgesezte Arbeit die Coefficienten dieser Verwandlungen immer grössere Zahlen werden. Auch dieser Unbequemlichkeit hat La Grange auf das scharfsinnigste abgeholfen, und gezeigt, daß man, nachdem man der gesuchten Wurzel der Hauptgleichung durch die vorhergehenden Operationen etwas nahe gekommen, bei den folgenden Verwandlungen nicht nöthig habe, die Gränzen von x in jeder derselben durch Probiren zu finden, und daß sie vermittelst einer einfachen Formel leicht bestimmt werden können. Diß ist der Hauptpunkt seiner vortreflichen Methode, und beruhet auf folgendem:

1) Es seyen $\frac{p^\circ}{q^\circ}$, $\frac{p}{q}$ ein Paar gegen die gesuchte Wurzel x convergirende Brüche, und z sey der dem leztern correspondirende vollständige Quotient, so ist, nach §. 6. Nro. 2. und §. 11. Nro. 2. der wahre Werth von $x = \frac{pz + p^\circ}{qz + q^\circ}$. Hieraus folgt sodann

$$z = \frac{q^\circ x - p^\circ}{p - qx}, \text{ und } z + \frac{q^\circ}{q} = \frac{pq^\circ - p^\circ q}{q(p - qx)}.$$

Diß voraus gesezt, so bemerken wir, daß die vorgegebene Gleichung

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \ldots\ldots + k = 0, \text{ oder}$$

$$x^n + \frac{bx^{n-1}}{a} + \frac{cx^{n-2}}{a} \ldots\ldots + \frac{k}{a} = 0.$$

n Wurzeln habe; mithin außer dem so eben betrachteten Werthe x noch $n - 1$ andere, die wir x_1, x_2, x_3, x_4, &c. nennen wollen. Wenn daher dem Bruche $\frac{p}{q}$ derjenige vollständige Quotient z_1 zugehört, aus welchem sich die Reihe der gegen x_1 convergirenden Brüche entwickeln läßt, so ist auch hier

$$z_1 + \frac{q^\circ}{q} = \frac{pq^\circ - p^\circ q}{q(p - qx_1)}$$

Eben so auch $z_2 + \frac{q^\circ}{q} = \frac{pq^\circ - p^\circ q}{q(p - qx_2)}$

$$z_3 + \frac{q^\circ}{q} = \frac{pq^\circ - p^\circ q}{q(p - qx_3)}$$

und

und so fort bis auf

$$z_{n-1} + \frac{q^\circ}{q} = \frac{p q^\circ - p^\circ q}{q(p - q x_{n-1})}.$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so hat man

$$z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_{n-1} + \frac{(n-1) q^\circ}{q}$$

$$= \frac{p q^\circ - p^\circ q}{q} \left(\frac{1}{p - q x_1} + \frac{1}{p - q x_2} + \frac{1}{p - q x_3} + \&c. \right)$$

Aber in der Gleichung

$$x^n + \frac{b x^{n-1}}{a} + \frac{c x^{n-2}}{a} \ldots + \frac{k}{a} = 0.$$

ist, wie in den ersten Sätzen der Algebra erwiesen wird, der Coefficient $\frac{b}{a}$ des zweiten Glieds die Summe aller Wurzeln der Gleichung, und zwar ist derselbe bejaht, wenn die Wurzeln verneint sind, und umgekehrt.

Es ist demnach

$$z + z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_{n-1} = -\frac{b}{a}.$$

also $z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_{n-1} = -z - \frac{b}{a}.$

Daher haben wir

$$-z - \frac{b}{a} + \frac{(n-1) q^\circ}{q}$$

$$= \frac{p q^\circ - p^\circ q}{q} \left(\frac{1}{p - q x_1} + \frac{1}{p - q x_2} + \frac{1}{p - q x_3} + \&c. \right)$$

oder,

oder, wegen $pq^{\circ} - pq^{\circ} = \pm 1$,

$$-z - \frac{b}{a} + \frac{(n-1)\,q^{\circ}}{q}$$

$$= \pm \frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{\frac{p}{q}-x_1} + \frac{1}{\frac{p}{q}-x_2} + \frac{1}{\frac{p}{q}-x_3} + \&c.\right)$$

Nach obiger Annahme bedeutet aber $\frac{p}{q}$ einen von den gegen x convergirenden Brüchen. Ist demnach, wie jezt vorausgesezt wird, die Berechnung der Näherungswerthe von x schon so weit gediehen, daß man $\frac{p}{q}$ anstatt x setzen darf, und umgekehrt, so haben wir:

$$-z - \frac{b}{a} + \frac{(n-1)\,q^{\circ}}{q}$$

$$= \pm \frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} \ldots + \&c.\right)$$

2) Hier ist das zweite Glied der Gleichung,

$$\pm \frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \&c.\right)$$

um so kleiner, je größer q, und je größer zugleich der Unterschied der Wurzeln x, x_1, x_2, x_3, &c. der gegebenen Hauptgleichung ist. Lezterer ist eine beständige Größe, und q mithin um so mehr q^2, wächset mit jeder neuen Annäherung an x (§. 11. Nro. 1.) Man siehet also, daß wenn auch die Wurzeln x, x_1, x_2, &c. nicht sehr von einander verschieden sind, (daß sie es aber immer seyn müssen, wurde §. 55. Nro. 1. vorausgesezt)

ezt) man doch immer durch fortgeseztes Annähern an den Werth von x, bald so weit kommen werde, daß in Betracht der Größe von q^2 das Glied

$$\pm \frac{1}{q^2} \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \&c. \right)$$

als unbedeutend, (besonders da nur ganze Zahlen bezwekt werden, wie sich gleich zeigen wird) vernachläßiget werden kann. Ist aber diß, so hat man

$$- z - \frac{b}{a} + \frac{(n - 1)\, q^{\circ}}{q} = 0,$$

und hieraus $z = \frac{(n - 1)\, q^{\circ}}{q} - \frac{b}{a}$.

3) Die Anwendung dieses für den vollständigen Quotienten z gefundenen Ausdruks ist folgende:

Da die Werthe von den x in den verschiedenen Verwandlungen nichts anders sind, als die Quotienten des die gesuchte Wurzel der Hauptgleichung ausdrükkenden continuirlichen Bruchs: so läßt sich für eine bekannte Verwandlung aus dem bekannten derselben zugehörigen Werthe oder Quotienten x die Reihe der durch die vorhergehenden Verwandlungen bestimmten, gegen die gesuchte Wurzel convergirenden Brüche um einen Bruch $\frac{p}{q}$ (wenn $\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}}$ der vor diesem hergehende lezte war) nach §. 8. oder um ein Glied verlängern. Aus diesem Bruche und einigen Coefficienten eben dieser Verwandlung findet sich nach der so eben gegebenen Formel der

dem

dem Bruche $\frac{p}{q}$ zugehörige vollständige Quotient z.

Die in diesem steckende gröste ganze Zahl ist ein neuer Quotient, das ist: sie ist der Werth von dem x der folgenden Verwandlung. Nachdem also diese vermittelst dieses so eben gefundenen Werths von x nach §. 58. berechnet, und zugleich der diesem neuen Quotienten correspondirende convergirende Bruch $\frac{p^I}{q^I}$ abermals bestimmt worden, so berechnet man aus dem neuen q^I und dem neuen a und b, die wir für einen Augenblick a^I und b^I heißen wollen, durch die Formel

$$z = (n - 1) \frac{q^0}{q} - \frac{b}{a},$$ die sich jezt in

$$(n - 1) \frac{q}{q^I} - \frac{b^I}{a^I}$$ umwandelt, einen neuen

vollständigen Quotienten, sucht den darinn steckenden Quotienten, berechnet vermittelst dieses neuen Werths die folgende Verwandlung, und rückt zugleich in der Reihe der gegen die gesuchte Wurzel der Hauptgleichung convergirenden Brüche vermittelst eben dieses Quotienten um eine Stelle weiter, und so fort ins Unendliche.

§. 62. Zur Erläuterung des bisherigen wählen wir das §. 59. angefangene Beispiel.

Dort finden wir:

Hauptgleichung.	$x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0.$	Werth von $x = 2.$	Die gesuchte Wurzel $= 2$
1. Verwandlung.	$-x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0.$	- - - $= 4.$	$= 2 + \frac{1}{4}$
2. Verwandlung.	$5x^3 - 19x^2 - 9x - 1 = 0.$	- - - $= 4.$	$= 2 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{4}}$
3. Verwandlung.	$-21x^3 + 79x^2 - 41x + 5 = 0.$	- - - $= 4.$	$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{4}}}.$
4. Verwandlung.	$89x^3 - 335x^2 - 173x - 21 = 0.$	- - - $= 4.$	

Die bis zur dritten Verwandlung gefundenen Quotienten 2, 4, 4, 4, geben folgende Reihe von Brüchen, die gegen die gesuchte Wurzel convergiren:

$$\begin{array}{ccccc} 2, & 4, & 4, & 4, & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{9}{4}, & \frac{38}{17}, & \frac{161}{72}. \end{array}$$

Es ist daher der, der vierten Verwandlung zugehörige Werth von x der (noch unbekannte,) dem Bruche $\frac{161}{72}$ zugehörige Quotient. Aber nach unserer Formel

$$z = (n-1)\frac{q^{\circ}}{q} - \frac{b}{a}$$

ist z der eben diesem Quotienten correspondirende vollständige Quotient. Da nun hier $n = 3$, $q = 72$, und $q^{\circ} = 17$, ferner $a = 89$, und $b = -335$ ist, so haben wir für z den Werth

$$z = \frac{2.17}{72} + \frac{335}{89} = 4 +$$

Es ist also 4, als die größte in z steckende ganze Zahl der dem Bruche $\frac{161}{72}$ correspondirende Quotient, und zugleich auch der nächste Werth von dem x der vierten Verwandlung.

Jezt berechne man nach §. 52. vermittelst dieses gefundenen Werths $x = \alpha = 4$ die Coefficienten der fünften Verwandlung, so wird sich finden:

$$-377x^3 + 1419x^2 + 733x + 89 = 0.$$

Und

Und zugleich rücke man, vermittelst eben dieses Quotienten 4 die Reihe der gegen die gesuchte Wurzel convergirenden Brüche um eine Stelle weiter, wie hier zu ersehen ist,

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 4, & 4, & 4 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{9}{4}, & \frac{38}{17}, & \frac{161}{72}, & \frac{682}{305} \end{array}$$

so ist auch hier der dem Bruche $\frac{682}{305}$ correspondirende Quotient der nächste Werth von dem x der fünften Verwandlung.

Da aber überhaupt der vollständige Quotient

$$z = (n - 1)\frac{q^{\circ}}{q} - \frac{b}{a},$$

und hier $n = 2$, $q^{\circ} = 72$, $q = 305$, $a = -377$, und $b = 1419$ ist, so ist also

$$z = \frac{2.72}{305} + \frac{1419}{377} = 4 +$$

also der neue Quotient, oder auch Werth von x in der fünften Verwandlung, abermals = 4.

Vermittelst dieses Werths $x = \alpha = 4$ formire man nun abermal nach §. 58. die Coefficienten der sechsten Verwandlung, rücke zugleich die obige Reihe der gegen die gesuchte Wurzel convergirenden Brüche um eine Stelle weiter: suche aufs neue durch die Formel für z, den dieser Stelle correspondirenden Quotienten, oder Werth von dem x der sechsten Verwandlung, u. s. w. so erhält man den Werth der gesuchten Wurzel immer genauer.

§. 63.

§. 63. Die dritte Abkürzung besteht darinn, daß, wenn die Werthe von x anfangen, sehr genau zu werden, das ist, wenn die Nenner q^o, q, sehr gros sind, man die Formel

$$z = (n - 1) \frac{q^o}{q} - \frac{b}{a},$$

welche, wie wir gesehen, dazu dient, für jede Verwandlung den nächsten Werth des derselben correspondirenden x zu finden, auch noch überdiß gebrauchen kann, um einige x der unmittelbar darauf folgenden Verwandlungen, sehr leicht zu bestimmen. Diß geschiehet nehmlich dadurch, daß man den Werth von z in einen continuirlichen Bruch verwandelt, und einige der ersten auf diese Art erhaltenen Quotienten an die bereits gefundenen in der Reihe der gegen die gesuchte Wurzel convergirenden Brüche anhängt. Da aber die Untersuchung der Gränze, wie weit sich dieser Vortheil erstrekt, für den gegenwärtigen Zwek zu weitläufig ist, so übergehen wir hier denselben um so mehr, als der Leser auch ohne denselben durch das bisherige in den Stand gesezt ist, die Rechnung leicht, und mit mathematischer Sicherheit bis zu jeder beliebigen Gränze fortzusetzen. Doch wird am Ende von dem das ganze beschließenden Beispiele von dieser dritten Abkürzung noch einmal die Rede seyn.

Anmerkung.

§. 64. Wir haben in der ganzen bisherigen Darstellung der Theorie des La Grange vorausgesezt, daß die Coefficienten der aufzulösenden Gleichung

$$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} \ldots + k = 0.$$

ganze Zahlen, und die Wurzeln derselben reel seyn sollen. Diese Bedingungen sind nicht wesentlich. Jene können Brüche oder auch Irrationalzahlen, und diese imaginair seyn, und gleichwohl läßt sich dieselbe Methode zu Erforschung dieser Wurzeln anwenden. Da aber unser Zwek, wie schon gesagt worden, nicht ist, hier eine vollständige Darstellung dieser Theorie zu geben, sondern nur das Wesentliche davon als eine Anwendung der im Anfange dieses Werkchens bewiesenen Eigenschaften continuirlicher Brüche vorzutragen, und dadurch auf diese schöne und wichtige Erfindung aufmerksam zu machen; so wollen wir diese Untersuchungen hiemit beschließen.

Beispiel.

§. 65. Man soll die Gleichung:

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$$

auflösen.

Die Annahmen $x = 5$ und $x = 6$ verwandeln die Gleichung in -13 und $+88$. Daher ist eine Wurzel derselben zwischen 5 und 6.

Ferner

Ferner gibt die Annahme $x = 2$ und $x = 3$ die Resultate $+ 8$ und $- 5$, mithin ist auch eine Wurzel zwischen 2 und 3.

Sodann folgen aus $x = 0$ und $x = 1$ die Resultate $- 8$ und $+ 3$. Es fällt also die dritte Wurzel zwischen 0 und 1.

Endlich gibt die Voraussetzung $x = 0$ und $x = -1$ die Resultate $- 8$ und $+ 11$. Folglich ist die lezte Wurzel zwischen 0 und $- 1$.

Da aber die Untersuchungen dieser 4 Wurzeln sich vollkommen gleichen: so wird es zur Erläuterung des bisherigen genug seyn, dieselbe nur mit einer einzigen vorzunehmen. Wir wählen hiezu die erste.

Entwicklung derjenigen Wurzel der Gleichung:

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0,$$

die zwischen 5 und 6 fällt.

Man hat

$$\phi = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8.$$

Also für $x = \alpha = 5$ ist dieser Werth $= - 13 = a$.

Ferner ist

$$\frac{d\phi}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 28x + 4 \text{ - - - } = 44 = b.$$

$$\frac{d^2\phi}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 14 \text{ - - - - - - - } = 44 = c.$$

$$\frac{d^3\varphi}{2.3.dx^3} = 4x - 8. \text{ - - - - - - - - - - } = 12 = d.$$

$$\frac{d^4\varphi}{2.3.4.} = 1. \text{ - - - - - - - - - - - - - - - - } = 1 = e.$$

Erste Verwandlung:

$$-13x^4 + 44x^3 + 44x^2 + 12x + 1 = 0.$$

nächster Werth von x in ganzen Zahlen 4.

Also

$$\varphi = -13x^4 + 44x^3 + 44x^2 + 12x + 1.$$

Für $x = \alpha = 4$ ist dieser Werth $= 241 = a$.

$$\frac{d\varphi}{dx} = -4.13x^3 + 3.44x^2 + 2.44x + 12. = -852 = b.$$

$$\frac{d^2\varphi}{2dx^2} = -6.13x^2 + 3.44x + 44. \text{ - - - } = -676 = c.$$

$$\frac{d^3\varphi}{2.3.dx^3} = -4.13x + 44. \text{ - - - - } = -164 = d.$$

$$\frac{d^4\varphi}{2.3.4.dx^4} = -13. \text{ - - - - - - - - - - } = -13 = e.$$

Mithin zweite Verwandlung:

$$241x^4 - 852x^3 - 676x^2 - 164x - 13 = 0.$$

nächster Werth von x abermals = 4.

Also

Also

$$\varphi = 241\,x^4 - 852\,x^3 - 676\,x^2 - 164\,x - 13.$$

Für $x = \alpha = 4$ wird dieser Werth $= -4317 = a.$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 4.241x^3 - 3.852x^2 - 2.676x - 164. = 15228 = b.$$

$$\frac{d^2\varphi}{2dx^2} = 6.241\,x^2 - 3.852\,x - 676. \;-\;- = 12236 = c.$$

$$\frac{d^3\varphi}{2.3.dx^3} = 4.241\,x - 852. \;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- = 3004 = d.$$

$$\frac{d^4\varphi}{2.3.4.dx^4} = 241. \;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;-\;- = 241 = e.$$

Also dritte Verwandlung:

$$-4317x^4 + 15228x^3 + 12236x^2 + 3004x + 241 = 0.$$

und nun sind wir so weit, daß wir den Vortheil §. 61. benuzen können.

Es ist nehmlich die Reihe der bisher gefundenen Quotienten 5, 4, 4, aus diesen bilde man die Brüch,

$$5, \quad 4, \quad 4,$$

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{5}{1}, \quad \frac{21}{4}, \quad \frac{89}{17}.$$

Heißt nun der dem Bruche $\frac{89}{17}$ zugehörige vollständige Quotient z; so ist nach §. 61. Nro. 2.

$$z = (n-1)\,\frac{q^\circ}{q} - \frac{b}{a},$$

 welcher

welcher Werth, da hier $n = 4$, $q = 17$, $q^{\circ} = 4$, $a = -4317$ und $b = 15228$ ist, sich in

$$z = \frac{3.4}{17} + \frac{15228}{4317} = 4 + \text{ verwandelt.}$$

Daher ist der Quotient oder die ganze in z stekkende Zahl $= 4$, und diß ist also zugleich auch der nächste ganze Werth für das x der dritten Verwandlung. Aus demselben suche man hierauf die Coefficienten der vierten Verwandlung.

Es ist nehmlich:

$$\phi = -4317x^4 + 15228x^3 + 12336x^2 + 3004x + 241.$$

Für $x = \alpha = 4$ wird dieser Werth $= 77473 = a$.

$$\frac{d\phi}{dx} = -4.4317\,x^3 + 3.15228\,x^2 + 2.12336\,x + 3004.$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - - -} = -273316 = b.$$

$$\frac{d^2\phi}{2\,dx^2} = -6.4317\,x^2 + 3.15228\,x + 12236.$$

$$\text{- - - - - - - - - - - - -} = -219460 = c.$$

$$\frac{d^3\phi}{2.3.d\,x^3} = -4.4317\,x + 15228. \text{ - -} = -53844 = d.$$

$$\frac{d^4\phi}{2.3.4.dx^4} = -4317. \text{ - - - - - - - -} = -4317 = e.$$

Also vierte Verwandlung:

$$77473x^4 - 273316x^3 - 219460x^2 - 53844x - 4317 = 0.$$

Um

Um nun den Werth von dem x dieser Verwandlung zu bestimmen, rücke man, vermittelst des vorher gefundenen Quotienten 4 die Reihe der convergirenden Brüche um eine Stelle weiter, so daß man haben wird:

$$\begin{matrix} 5, & 4, & 4, & 4, & \\ \frac{1}{0}, & \frac{5}{1}, & \frac{21}{4}, & \frac{89}{17}, & \frac{377}{72}, \end{matrix}$$

so ist $z = (n - 1)\frac{q^{o}}{q} - \frac{b}{a}$

hier $= \frac{3 \cdot 17}{72} + \frac{273316}{77473} = 4 +.$

Mithin ist das x dieser vierten Verhandlung abermals 4.

Die bisherigen Verwandlungen, noch um eine fünfte vermehrt, sind demnach:

$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0.$	$x = 5.$	5 : 1.
$-13x^4 + 44x^3 + 44x^2 + 12x + 1 = 0.$	$x = 4.$	21 : 4.
$241x^4 - 852x^3 - 676x^2 - 164x - 13 = 0.$	$x = 4.$	89 : 17.
$-4317x^4 + 15228x^3 + 12236x^2 + 3004x + 241 = 0.$	$x = 4.$	377 : 72.
$77473x^4 - 273316x^3 - 219460x^2 - 53844x - 4317 = 0.$	$x = 4.$	1597 : 305.
$-1390189x^4 + 4904396x^3 + 3938156x^2 + 966252x + 77473 = 0.$	$x = 4.$	6765 : 1292.
&c.	&c.	&c.

Wenn

Wenn wir nun hier bei der fünften Verwandlung stehen bleiben, und dabei noch den oben berührten dritten Vortheil der Verkürzung benutzen wollen; so ist zu bemerken, daß für diese lezte Verwandlung

$$z = \frac{3 \cdot 72}{305} + \frac{4904396}{1390189} \text{ sey.}$$

Verwandelt man nun diesen Werth in einen einzigen Bruch, so ist derselbe

$$\frac{1796120604}{424007645},$$

und dieser Werth nach §. 8. 9. 10. in einen continuirlichen Bruch verwandelt, gibt eine Reihe von Quotienten, von denen mehrere von vornen an gerechnet, an die bereits gefundene angehängt werden können. Sie sind (hier zufälligerweise) 4, 4, 4, &c. so, daß also dadurch die Reihe der gegen die gesuchte Wurzel convergirenden Brüche um so viel Glieder verlängert werden kann, als von diesen Anfangs-Quotienten dürfen angehängt werden. Dieser lezteren Anzahl aber hängt von der Größe von q, oder von dem bereits erreichten Grade der Näherung ab, und je weiter diese getrieben wird, desto bedeutender wird dieser Vortheil, bei dem wir uns übrigens, da wir den Geist der

Lagran-

Lagrangeischen Methode hinlänglich gezeigt haben, nicht aufhalten wollen.

Anmerkung.

§. 66. Die Anwendungen der continuirlichen Brüche auf die Differenzial- und Integralrechnung, wie auch auf die unbestimmte Analytic bieten ein eigenes unermeßliches Feld dar, das eine besongere Bearbeitung verdienet, bei welcher man aber das bisherige als Grundlage gebrauchen muß. Daher wir diese Materie hier beschließen.

Ende.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kausler, Christoph Friedrich,

Die Lehre von den Continuirlichen Brüchen nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen auf Arithmetik und Algebra vollständig abgehandelt

Stuttgart 1803

Math.p. 251 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082119-2